1 Números enteros

INTRODUCCIÓN

La representación numérica en la recta de los números enteros nos introduce en el estudio de su ordenación y comparación, el concepto de valor absoluto y la existencia de los signos + o − que les preceden.

Utilizando conceptos ya adquiridos como: añadir, tener, sobre, más que; reducir, menos que, deber, bajo, junto con las reglas de los signos y el uso de los paréntesis, realizaremos operaciones básicas con los números enteros.

El concepto de múltiplo y divisor común de dos números, ligado a su relación de divisibilidad, requiere el dominio de las operaciones básicas de multiplicación y división de números naturales.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Los *números enteros* son los números naturales precedidos de los signos + y −, y el número 0. El mayor de dos números naturales se sitúa siempre más a la derecha en la recta numérica.
- Los *múltiplos de un número* contienen al número una cantidad exacta de veces. Los divisores de un número son aquellos que caben exactamente en él una serie de veces.
- *Descomponer un número en factores primos* permite expresar dicho número como producto de distintos números primos elevados a exponentes.
- El *máximo común divisor* m.c.d. de dos números es el mayor de los divisores comunes de ambos.
- El *mínimo común múltiplo* m.c.m. de dos números es el menor de los múltiplos comunes de ambos.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Comprender el significado de los números positivos y negativos.	• Números enteros negativos y positivos. • Recta numérica: representación, orden y comparación de números enteros. • Valor absoluto. Opuesto de un número.	• Reconocimiento de números enteros. • Ordenación y comparación de los números enteros. • Cálculo del valor absoluto.
2. Realizar operaciones aritméticas con números enteros.	• Suma y resta de números enteros. • Operaciones combinadas. • Multiplicación y división de números enteros. Regla de los signos.	• Realización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números enteros. • Uso correcto de paréntesis y signos.
3. Realizar operaciones con potencias.	• Producto y cociente de potencias con la misma base. • Potencias de exponentes cero y uno. • Potencia de una potencia.	• Desarrollo inicial de operaciones con potencias. • Aplicación de las técnicas de cálculo para hallar potencias.
4. Identificar los múltiplos y los divisores de un número.	• Múltiplos y divisores de un número. • Relación de divisibilidad.	• Obtención de los múltiplos y divisores de un número. • Relación entre múltiplo y divisor.
5. Descomponer en factores primos. El m.c.d. y el m.c.m.	• Números primos y compuestos. • Descomposición en factores primos. • Múltiplos y divisores comunes: el m.c.d y el m.c.m.	• Identificación de números primos y compuestos. • Producto de factores primos. • Cálculo del m.c.d. y el m.c.m. Resolución de problemas.

COMPRENDER EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

NÚMEROS NEGATIVOS

- En nuestra vida diaria observamos, leemos y decimos expresiones del siguiente tipo.

EXPRESIONES COMUNES	SE ESCRIBE MATEMÁTICAMENTE	SE LEE
Hemos dejado el coche en el segundo sótano	**−2**	Menos dos
El submarino está a cien metros bajo la superficie del mar	**−100**	Menos cien
Hace una temperatura de cuatro grados bajo cero	**−4**	Menos cuatro
Tu cuenta está en números rojos: debes 120 €	**−120**	Menos ciento veinte

−2, −100, −4, −120 son números negativos.

- Expresan cantidades, situaciones o medidas cuyo valor es menor que cero.
- Les precede el signo menos (−).
- Se asocian a expresiones del tipo: menos que, deber, bajo, disminuir, restar, me he gastado...

1 **Completa la siguiente tabla.**

EXPRESIONES COMUNES	SE ESCRIBE MATEMÁTICAMENTE	SE LEE
La cueva está a cincuenta y cinco metros de profundidad		
La sección de juguetes está en el tercer sótano		
La temperatura fue de un grado bajo cero		
La estación de metro se encuentra a cuarenta y cinco metros por debajo del suelo		
He perdido 2 €		

2 **Escribe situaciones que representen los siguientes números negativos.**

a) −2 ....

b) −5 ....

c) −10 ....

d) −150 ....

NÚMEROS POSITIVOS

- Por otro lado, también observamos, leemos y decimos expresiones como:

EXPRESIONES COMUNES	SE ESCRIBE MATEMÁTICAMENTE	SE LEE
La ropa vaquera está en la tercera planta	**+3**	Más tres
La gaviota está volando a cincuenta metros sobre el nivel del mar	**+50**	Más cincuenta
¡Qué calor! Estamos a treinta grados sobre cero	**+30**	Más treinta
Tengo en el banco 195 €	**+195**	Más ciento noventa y cinco

+3, +50, +30, +195 son números positivos.

- Expresan cantidades, situaciones o medidas cuyo valor es mayor que cero.
- Les precede el signo más (+).
- Se asocian a expresiones del tipo: más que, tengo, sobre, aumentar, añadir, sumar...

3 **Completa la siguiente tabla.**

EXPRESIONES COMUNES	SE ESCRIBE MATEMÁTICAMENTE	SE LEE
Estamos a treinta y dos grados sobre cero		
El avión vuela a mil quinientos metros sobre el nivel del mar		
El monte tiene una altura de ochocientos metros		
La cometa es capaz de volar a ochenta metros		
Me encontré en el suelo un billete de 5 €		
Te espero en la planta baja		

ADAPTACIÓN CURRICULAR

Los números positivos, negativos y el cero forman el conjunto de los **números enteros**, conjunto representado por la letra $\mathbb{Z}$.

- **Positivos:** +1, +2, +3, +4, +5, +6… (naturales con signo +).
- **Negativos:** −1, −2, −3, −4, −5, −6… (naturales con signo −).
- **Cero:** 0.

4 **Un termómetro ha marcado las siguientes temperaturas en grados centígrados durante siete días. Exprésalas con números enteros.**

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
Dos sobre cero	Cinco sobre cero	Cero grados	Tres bajo cero	Dos sobre cero	Uno bajo cero	Cinco bajo cero

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS. ORDEN EN LA RECTA NUMÉRICA

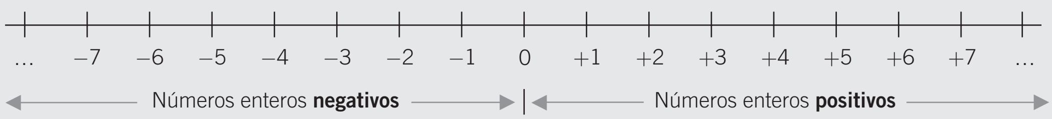
Los números enteros se representan en una recta de esta manera.

1.º Dibujamos una recta y señalamos el cero, 0.

2.º Dividimos la recta en segmentos iguales (unidades), a la derecha y la izquierda del cero.

3.º A la **derecha** colocamos los números enteros **positivos**, y a la **izquierda** colocamos los números enteros **negativos**.

Observa que están ordenados:



5 **Representa en una recta los siguientes números enteros: +8, −9, +5, 0, −1, +6, −7, +11, −6.**

6 **Dados los números enteros: −7, +8, +3, −10, +6, +4, −2:**

a) Represéntalos en la recta numérica.

b) ¿Cuál está más alejado del cero?

c) ¿Cuál está más cerca del cero?

d) Escribe, para cada uno de ellos, otro número situado a igual distancia del cero que él.

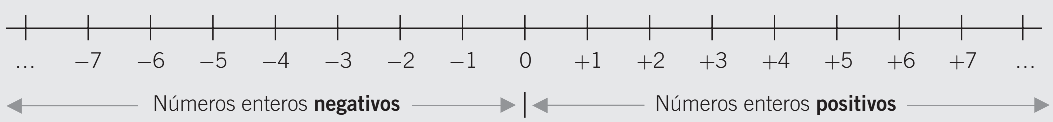
COMPARACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Ya sabemos que en la recta se representan los números enteros ordenados. Hay que tener en cuenta:

1.º Un número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.

2.º Entre varios números enteros, siempre es mayor el que está situado más a la derecha sobre la recta.

3.º Para comparar utilizamos los símbolos **mayor que** (>) y **menor que** (<).



$\ldots -7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < +4 < +5 < +6 < +7 \ldots$

$\ldots +7 > +6 > +5 > +4 > +3 > +2 > +1 > 0 > -1 > -2 > -3 > -4 > -5 > -6 > -7 \ldots$

7 **Ordena.**

DE MENOR A MAYOR (<)	DE MAYOR A MENOR (>)
−8, −16, +5, −2, +13, +3, −4, −9, +9, 0, +18, −10	+11, −2, +8, 0, −1, +5, −6, +3, −3, +7, −4, −9, +17

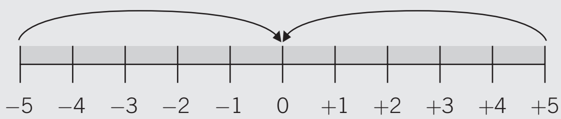
8 **Escribe el signo que corresponda entre cada par de números enteros: $<$ o $>$.**

a) +5 ◯ −2 c) −1 ◯ 0 e) +11 ◯ +15 g) −7 ◯ −4

b) 0 ◯ +8 d) −4 ◯ +1 f) +10 ◯ −9 h) +5 ◯ −11

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

- El valor absoluto de un número entero es la **distancia** (en unidades) que le separa del cero en la recta numérica.
- En la práctica se escribe entre dos barras | | y resulta el mismo número sin su signo: Valor absoluto de −3 se escribe |−3| y es 3. Valor absoluto de +5 se escribe |+5| y es 5.
- Se observa que: |+5| = 5 y |−5| = 5.



- Los números enteros +5 y −5 están a la misma distancia del cero: 5 unidades.
- Se dice que +5 y −5 son números opuestos y se escribe así:
  op (+5) = −5   op (−5) = +5
- Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto.

9 **Completa la siguiente tabla.**

VALOR ABSOLUTO	RESULTADO	SE LEE
|+10|	10	El valor absoluto de +10 es 10
|−8|		
	7	
|−9|		
		El valor absoluto de −15 es 15

10 **Para cada número entero, halla su número opuesto y represéntalos en una recta numérica.**

a) −3 b) +9 c) −12 d) +8

REALIZAR OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS ENTEROS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

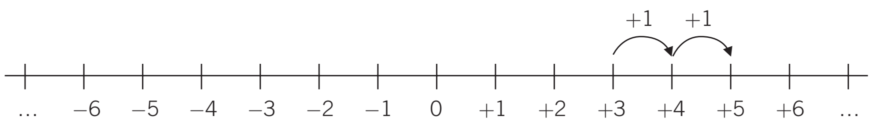
Para **sumar** dos números enteros del **mismo signo**, se suman sus valores absolutos y al resultado se le pone el signo de los sumandos.

EJEMPLO

$$\mathbf{(+3)+(+2)}\left.\right\}\begin{array}{c}|+3|=3\quad |+2|=2\\ 3+2=5\end{array}\left.\right\}(+3)+(+2)=+5$$

$$\mathbf{(-4)+(-1)}\left.\right\}\begin{array}{c}|-4|=4\quad |-1|=1\\ 4+1=5\end{array}\left.\right\}(-4)+(-1)=-5$$

$(+3)+(+2)=+5$



Para **sumar** dos números enteros de **distinto signo**, se restan sus valores absolutos y al resultado se le pone el signo del sumando con mayor valor absoluto.

EJEMPLO

$$\mathbf{(+5)+(-1)}\left.\right\}\begin{array}{c}|+5|=5\quad |-1|=1\\ 5-1=4\end{array}\left.\right\}(+5)+(-1)=+4$$

$$\mathbf{(-6)+(+5)}\left.\right\}\begin{array}{c}|-6|=6\quad |+5|=5\\ 6-5=1\end{array}\left.\right\}(-6)+(+5)=-1$$

$(+5)+(-1)=+4$

1 **Realiza y representa en la recta numérica las siguientes sumas.**

a) $(-3)+(-1)$ b) $(+4)+(+4)$ c) $(+5)+(-2)$ d) $(-2)+(-5)$ e) $(+4)+(-4)$

Para **restar** dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.
Se aplica a continuación la regla de la suma de números enteros.

EJEMPLO

$\mathbf{(+5)-(+2)}=(+5)+(-2)=+3$

$$\text{op}\ (+2)=-2\qquad \left.\begin{array}{l}|+5|=5\\ |-2|=2\end{array}\right\}5-2=3$$

EJEMPLO

$\mathbf{(-6)-(-1)}=(-6)+(+1)=-5$

$$\text{op}\ (-1)=+1\qquad \left.\begin{array}{l}|-6|=6\\ |+1|=1\end{array}\right\}6-1=5$$

OPERACIONES COMBINADAS DE SUMAS Y RESTAS DE NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros pueden combinarse mediante sumas y restas. Hay que tener en cuenta una serie de reglas:

- Cuando el primer sumando es positivo se escribe sin signo.
- Al eliminar los paréntesis, el signo que le precede afecta a todos los números:
  – El signo + **mantiene** los signos de todos los números: $+(-7+2-1+8) = -7+2-1+8$.
  – El signo – **cambia** los signos de todos los números: $-(-7+2-1+8) = +7-2+1-8$.

Podemos operar de dos formas:

- Sumar por separado los enteros positivos, los enteros negativos y hallar la resta entre ambos.
- Realizar las operaciones en el orden en que aparecen.

EJEMPLO

Haz estas operaciones combinadas.

a) $\mathbf{(+7) + (+2)} = 7 + 2 = 9$

b) $\mathbf{(-4) + (-1)} = -4 - 1 = -5$

c) Primera forma: $\mathbf{+(-5 + 3 - 2 + 7)} = -5 + 3 - 2 + 7 = -7 + 10 = +3$
Segunda forma: $\mathbf{+(-5 + 3 - 2 + 7)} = -5 + 3 - 2 + 7 = -2 - 2 + 7 = -4 + 7 = +3$

d) Primera forma: $\mathbf{-(-5 + 3 - 2 + 7)} = +5 - 3 + 2 - 7 = 7 - 10 = -3$
Segunda forma: $\mathbf{-(-5 + 3 - 2 + 7)} = +5 - 3 + 2 - 7 = +2 + 2 - 7 = +4 - 7 = -3$

2 **Realiza las siguientes operaciones, utilizando las reglas anteriores.**

Ejemplo: $(+11) + (-2) = 11 - 2 = 9$.

a) $(+7) + (+1) =$

b) $(-15) + (-4) =$

c) $(+9) - (-5) =$

d) $(+10) - (+2) =$

e) $(-11) - (-10) =$

f) $(-7) + (+1) =$

3 **Haz las operaciones.**

a) $7 - 5 =$

b) $11 - 4 + 5 =$

c) $-9 - 7 =$

d) $-3 + 8 =$

e) $-1 + 8 + 9 =$

f) $-10 + 3 + 7 =$

4 **Calcula.**

a) $5 - 7 + 19 - 20 + 4 - 3 + 10 =$

b) $-(8 + 9 - 11) =$

c) $9 - 11 + 13 + 2 - 4 - 5 + 9 =$

d) $-(20 + 17) - 16 + 7 - 15 + 3 =$

5 **Calcula el resultado de las siguientes operaciones combinadas.**

a) $8 - (4 - 7) =$

b) $-4 - (5 - 7) - (4 + 5) =$

c) $-(-1 - 2 - 3) - (5 - 5 + 4 + 6 + 8) =$

d) $(-1 + 2 - 9) - (5 - 5) - 4 + 5 =$

e) $(-1 - 9) - (5 - 4 + 6 + 8) - (8 - 7) =$

f) $-4 - (4 + 5) - (8 - 9) + 1 + 6 =$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Para multiplicar dos números enteros se siguen estos pasos.

1.º Se multiplican sus valores absolutos (en la práctica, los números entre sí).

2.º Al resultado le colocamos el signo + si ambos números son de **igual signo**, y el signo − si son de **signos diferentes**.

EJEMPLO

(+5) · (−3) = −15 } 1.º $5 \cdot 3 = 15$
2.º −15, ya que son de distinto signo (positivo y negativo).

(−5) · (+3) = −15 } 1.º $5 \cdot 3 = 15$
2.º −15, ya que son de distinto signo (negativo y positivo).

(−5) · (−3) = +15 } 1.º $5 \cdot 3 = 15$
2.º +15, ya que son de igual signo (negativos).

(+5) · (+3) = +15 } 1.º $5 \cdot 3 = 15$
2.º +15, ya que son de igual signo (positivos).

DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Para dividir dos números enteros se siguen estos pasos.

1.º Se dividen sus valores absolutos (en la práctica, los números entre sí y siempre que la división sea exacta).

2.º Al resultado le colocamos el signo + si ambos números son de **igual signo**, y el signo − si son de **signos diferentes**.

EJEMPLO

(+20) : (−4) = −5 } 1.º $20 : 4 = 5$
2.º −5, ya que son de distinto signo (positivo y negativo).

(−20) : (+4) = −5 } 1.º $20 : 4 = 5$
2.º −5, ya que son de distinto signo (negativo y positivo).

(−20) : (−4) = +5 } 1.º $20 : 4 = 5$
2.º +5, ya que son de igual signo (negativos).

(+20) : (+4) = +5 } 1.º $20 : 4 = 5$
2.º +5, ya que son de igual signo (positivos).

En las operaciones de multiplicación y división de números enteros, se utiliza la **regla de los signos**.

MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
$(+) \cdot (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(-) \cdot (-) = +$	$(-) : (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$	$(-) : (+) = -$

6 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $(+7) \cdot (+2) =$

b) $(+12) \cdot (-3) =$

c) $(-10) \cdot (+10) =$

d) $(-5) \cdot (+8) =$

e) $(-1) \cdot (-1) =$

f) $(+5) \cdot (+20) =$

7 **Efectúa las divisiones.**

a) $(+16) : (+2) =$

b) $(-8) : (-1) =$

c) $(-25) : (+5) =$

d) $(-100) : (+10) =$

e) $(+12) : (-3) =$

f) $(+45) : (+9) =$

8 **Calcula las siguientes operaciones, aplicando la regla de los signos.**

a) $(+12) \cdot (-3) =$

b) $(-20) : (-10) =$

c) $(+6) \cdot (-6) =$

d) $(+80) : (-8) =$

e) $(-9) : (-3) =$

f) $(-100) : (+25) =$

g) $(-1) \cdot (-18) =$

h) $(-77) : (-11) =$

i) $(+10) \cdot (+4) =$

j) $(-9) \cdot (+8) =$

k) $(+35) : (+5) =$

l) $(-12) \cdot (+5) =$

9 **Completa los huecos con los números enteros correspondientes.**

a) $(+9) \cdot$ .... $= -36$

b) .... $\cdot (+10) = -100$

c) $(+3) \cdot$ .... $= -15$

d) $(-7) \cdot$ .... $= +21$

e) $(-30) \cdot$ .... $= +30$

f) $(-8) \cdot$ .... $= +16$

g) .... $\cdot (-8) = -40$

h) $(+6) \cdot$ .... $= 0$

i) .... $\cdot (-5) = +25$

10 **Completa los huecos con los números enteros correspondientes.**

a) $(+42) :$ .... $= -7$

b) $(-20) :$ .... $= -20$

c) $(+12) :$ .... $= -4$

d) $(-8) :$ .... $= +1$

e) .... $: (-6) = +5$

f) $(-64) :$ .... $= +8$

g) .... $: (-9) = +6$

h) $(+9) :$ .... $= -9$

i) $(-8) :$ .... $= -2$

REALIZAR OPERACIONES CON POTENCIAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

EJEMPLO

$\mathbf{2^2 \cdot 2^3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ En la práctica: $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$.

1 **Expresa con una sola potencia.**

a) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^3 = 2^{2+4+3} =$

b) $(-4)^4 \cdot (-4)^4 =$

c) $5^2 \cdot 5^3 =$

d) $(-5)^5 \cdot (-5)^2 =$

e) $6^4 \cdot 6 \cdot 6^3 \cdot 6^2 =$

f) $(-10)^3 \cdot (-10)^3 \cdot (-10)^4 =$

2 **Expresa como producto de factores las siguientes potencias.**

POTENCIA	N.º DE FACTORES	PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE
5^5	2	$5^2 \cdot 5^3$
$(-6)^6$	4	
2^9	5	
$(-10)^6$	3	
4^9	4	

Todo número se puede expresar como potencia de exponente 1.

EJEMPLO

$2 = 2^1$ $(-3) = (-3)^1$ $10 = 10^1$ $16 = 16^1$ $(-20) = (-20)^1$

3 **Coloca los exponentes que faltan de modo que se cumpla la igualdad.**
(Puede haber varias soluciones en cada caso.)

a) $2^2 \cdot 2^{\dots} \cdot 2^{\dots} = 2^6$

b) $4^2 \cdot 4^{\dots} \cdot 4^{\dots} \cdot 4^{\dots} = 4^7$

c) $3^{\dots} \cdot 3^{\dots} \cdot 3^{\dots} = 3^5$

d) $5^{\dots} \cdot 5^{\dots} = 5^5$

e) $(-7)^{\dots} \cdot (-7)^{\dots} = (-7)^5$

f) $10^{\dots} \cdot 10^{\dots} = 10^5$

g) $(-2)^4 \cdot (-2)^{\dots} \cdot (-2)^{\dots} = (-2)^8$

h) $10^6 \cdot 10^{\dots} \cdot 10^{\dots} = 10^9$

i) $6^{\dots} \cdot 6^{\dots} \cdot 6^{\dots} = 6^6$

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.

EJEMPLO

$$\frac{\mathbf{2^5}}{\mathbf{2^3}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{1} = \frac{2^3}{2^3} \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^2 = 2^2$$

En la práctica: $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$.

4 **Expresa con una sola potencia.**

a) $\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$ c) $\frac{4^4}{4^3} =$ e) $\frac{5^5}{5^3} =$

b) $\frac{(-4)^6}{(-4)^2} =$ d) $\frac{(-7)^3}{(-7)} =$ f) $\frac{(-6)^8}{(-6)^6} =$

POTENCIA DE EXPONENTE CERO

Una potencia de exponente cero vale siempre uno.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2^3}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8}{8} = 1 \\ \frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 \end{array}\right\} \boxed{\mathbf{2^0 = 1}}$$

5 **Coloca los exponentes que faltan, de modo que se cumpla la igualdad.**
(Puede haber varias soluciones en cada caso.)

a) $\frac{2^{\dots}}{2^{\dots}} = 2^{\dots} = 2^5$ c) $\frac{3^{\dots}}{3^{\dots}} = 3^{\dots} = 3^3$ e) $\frac{4^{\dots}}{4^{\dots}} = \dots\dots\dots = 4^2$

b) $\frac{10^{\dots}}{10^{\dots}} = \dots\dots\dots = 10^4$ d) $\frac{(-5)^{\dots}}{(-5)^{\dots}} = \dots\dots\dots = 5^2$ f) $\frac{6^{\dots}}{6^{\dots}} = \dots\dots\dots = 1$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Para elevar una potencia a otra se mantiene la misma base y se multiplican los exponentes.

EJEMPLO

$\mathbf{[(2)^3]^2} = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$ En la práctica: $[(2)^3]^2 = (2)^{3 \cdot 2} = 2^6$.

$\mathbf{[(-3)^4]^3} = (-3)^4 \cdot (-3)^4 \cdot (-3)^4 = (-3)^{4+4+4} = (-3)^{12}$ En la práctica: $[(-3)^4]^3 = (-3)^{4 \cdot 3} = (-3)^{12}$.

6 **Expresa con una sola potencia.**

a) $[(4)^5]^2 = (4)^{5 \cdot 2} = 4^{\dots}$ d) $[(5)^2]^4 =$

b) $[(-3)^3]^3 =$ e) $[(6)^0]^2 =$

c) $[(-8)^2]^3 =$ f) $[(10)^3]^4 =$

7 **Coloca los exponentes que faltan, de modo que se cumpla la igualdad.**
(Puede haber varias soluciones en cada caso.)

a) $[2^{\dots}]^{\dots} = 2^8$ c) $[3^{\dots}]^{\dots} = 3^{10}$ e) $[(-5)^{\dots}]^{\dots} = (-5)^6$

b) $[6^{\dots}]^{\dots} = 6^{12}$ d) $[4^{\dots}]^{\dots} = 1$ f) $[10^{\dots}]^{\dots} = 10^2$

IDENTIFICAR LOS MÚLTIPLOS Y LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

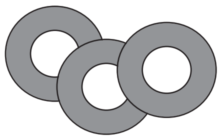
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Los **múltiplos** de un número son aquellos números que se obtienen multiplicando dicho número por 1, 2, 3, 4, 5, ..., es decir, por los números naturales.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	...

Múltiplos de 5 ⟶ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...

EJEMPLO



En una tienda las rosquillas se venden en paquetes de 3 unidades. ¿Cuántas puedo comprar si me llevo varios paquetes?

$3 \cdot 1 = 3$ rosquillas　　$3 \cdot 2 = 6$ rosquillas　　$3 \cdot 3 = 9$ rosquillas
$3 \cdot 4 = 12$ rosquillas　　$3 \cdot 5 = 15$ rosquillas　　$3 \cdot 6 = 18$ rosquillas

- Podemos comprar 3, 6, 9, 12, 15, 18… rosquillas.
- 3, 6, 9, 12, 15, 18... son múltiplos de 3.
- Los múltiplos de un número contienen a este una cantidad exacta de veces: 1, 2, 3, 4, 5, 6... paquetes de 3 unidades.

1 **Lucas va al supermercado y observa que los pañuelos se venden en paquetes de 3 unidades, los yogures en grupos de 4 unidades y las pelotas de tenis en botes de 5 unidades. ¿Cuántas unidades de cada artículo podríamos comprar?**

2 **Escribe los números que sean:**

a) Múltiplos de 5 y menores que 51.

b) Múltiplos de 25 y menores que 105.

c) Múltiplos de 30 y que estén comprendidos entre 50 y 280.

d) Múltiplos de 1.000 y que estén comprendidos entre 990 y 10.100.

Los **divisores** de un número son aquellos números enteros que caben en él una cantidad exacta de veces.

Para hallarlos:
1.º Realizamos todas las divisiones posibles (entre números menores e igual que él) tomando el número como dividendo.
2.º Buscamos las divisiones que sean exactas (resto = 0).

Calculamos los divisores de 8.

$$\begin{array}{r|l} 8 & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & 8 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{0} & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{0} & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 7 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & \mathbf{8} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}$$

- 1, 2, 4 y 8 ... son divisores de 8. Dividen exactamente a 8.
- 3, 5, 6 y 7 no son divisores de 8. No lo dividen exactamente (resto $\neq 0$).

3 **Realiza todas las divisiones posibles del número 12 entre números menores e igual que él.**

4 **Completa la tabla con los datos del ejercicio anterior.**

DIVISORES DE 12	
NO DIVISORES DE 12	

Cualquier número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.

5 **Tacha aquellos números que *no* sean:**

a) Divisores de 2 = {1, 2, 3}
b) Divisores de 9 = {1, 2, 3, 4, 6, 9}
c) Divisores de 11 = {1, 3, 7, 9, 11}
d) Divisores de 25 = {1, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30}
e) Divisores de 48 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 20, 24, 30, 45, 48}
f) Divisores de 100 = {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 40, 50, 60, 75, 90, 100}

6 **Rellena los huecos con los divisores correspondientes.**

36 | 1	36 | ___	36 | ___	36 | ___	36 | ___	36 | ___	36 | ___	36 | ___	36 | ___
06 36	16 18	06 12	0 9	0 6	0 4	0 3	0 2	0 1
0	0	0						

7 **Los divisores de 36 son: ....**

Múltiplo y **divisor** son dos conceptos estrechamente ligados. En una división exacta entre dos números existe una relación especial llamada **divisibilidad**.

49 | 7
0 7

- 49 es múltiplo de 7.
- 7 es divisor de 49.

- El número mayor es múltiplo del menor.
- El número menor es divisor del mayor.

De igual forma:

64 | 4
24 16
0

- 64 es múltiplo de 4.
- 4 es divisor de 64.

35 | 5
0 7

- 35 es múltiplo de 5.
- 5 es divisor de 35.

8 **Completa los huecos con la palabra adecuada: múltiplo o divisor.**

a) 25 es .... de 5
b) 60 es .... de 120
c) 16 es .... de 8
d) 11 es .... de 33

1 OBJETIVO 5
DESCOMPONER EN FACTORES PRIMOS. EL m.c.d. Y EL m.c.m.

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Número primo:** es aquel número que solo tiene dos divisores, él mismo y la unidad.
- **Número compuesto:** es aquel número que tiene más de dos divisores.

Divisores de 5 = 1 y 5	5 es un número primo.
Divisores de 8 = 1, 2, 4 y 8	8 es un número compuesto.

1 **En la siguiente serie de números, tacha los que son compuestos *(los que tienen más de dos divisores)*.**

1 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

- Los que quedan sin tachar son números ....
- Solo tienen .... divisores, que son ....

2 **En la siguiente serie de números, tacha los que son compuestos *(los que tienen más de dos divisores)*.**

31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60

- Los que quedan tachados son números ....
- Tienen más de .... divisores.

DESCOMPONER UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

- Ya sabemos que los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- Todo número compuesto se puede expresar como producto de otros que sean primos, y expresar sus divisores mediante la combinación de esos números, que llamamos **factores primos**.
- Para realizar la descomposición seguimos estos pasos.
  1.º Intentar dividir el número entre 2, tantas veces como se pueda.
  2.º Luego intentar también dividir el número restante entre 3, tantas veces como se pueda.
  3.º Seguir probando a dividir el número restante entre 5, 7, 11... tantas veces como se pueda, hasta obtener como cociente 1.
  4.º Expresar el número como producto de potencias de factores primos.

EJEMPLO

Realiza la descomposición en producto de factores primos del número 60.

En la práctica se hace así:

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Línea que actúa como «ventana» de división

y se expresa: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Recordando las potencias quedaría:

$$\mathbf{60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5}$$

60 queda así expresado como producto de factores primos.

3 **Descompón los siguientes números en factores primos y exprésalos como producto de ellos: 24, 30, 45 y 60.**

24	2	30	2	45	3	60	2
12	2						
6	2						
3	3						
1							

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$24 = 2^3 \cdot 3$

4 **Descompón los siguientes números en factores primos y exprésalos como producto de ellos: 25, 33, 75 y 100.**

DIVISORES COMUNES A VARIOS NÚMEROS. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.)

Luis tiene 12 trenes de plástico y Pedro 18 aviones. Quieren hacer grupos con el mismo número de vehículos en cada uno de ellos. ¿Cuál será el grupo más grande y que tenga igual número de ambos juguetes?

- Calculamos los divisores de ambos números:
  - Divisores de 12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12} — Juan puede hacer grupos iguales de <u>1</u>, <u>2</u>, <u>3</u>, 4, <u>6</u> y 12 trenes.
  - Divisores de 18 = {1, 2, 3, 6, 9, 18} — Pedro puede hacer grupos iguales de <u>1</u>, <u>2</u>, <u>3</u>, <u>6</u>, 9 y 18 aviones.
- 1, 2, 3 y 6 son divisores comunes de 12 y 18.
- 6 es el divisor mayor (máximo) de 12 y 18 y es común a ambos números.
- 6 es el máximo común divisor de 12 y 18 y se expresa así: m.c.d. (12 y 18) = 6.

El grupo más grande y con el mismo número de juguetes de los dos tipos estará formado por 6 trenes y 6 aviones.

5 **Halla los divisores comunes de:**

a) 20 y 25 b) 16 y 24 c) 8 y 12 d) 8, 10 y 12

6 **Calcula el m.c.d. de los números de cada apartado del ejercicio anterior.**

MÉTODO PARA EL CÁLCULO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Hasta ahora el proceso empleado para calcular el m.c.d. es adecuado para números sencillos.
Vamos a estudiar un método más directo y para números de cualquier tamaño. Seguiremos estos pasos.

1.º Descomponer los números en factores primos.

2.º Expresar los números como producto de factores primos.

3.º Escoger en ambos números los **factores** que sean **comunes** y que tengan el **menor exponente**.

4.º El producto de esos factores es el m.c.d.

EJEMPLO

Calcula el m.c.d. de 24 y 36.

1.º

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

2.º $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$

3.º Factores comunes: 2 y 3
Con menor exponente: 2^2 y 3^1

4.º m.c.d. (24 y 36) $= 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

7 **Calcula el m.c.d. de los números.**

a) 6 y 15 b) 15 y 20 c) 10 y 35 d) 25 y 50

8 **Completa la siguiente tabla.**

NÚMEROS	DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS	PRODUCTO DE FACTORES COMUNES CON MENOR EXPONENTE	m.c.d.
60 y 40	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $2^3 \cdot 5$	$2^2 \cdot 5$	20
18 y 30			
	5^2 $2^2 \cdot 5^2$		

9 **Queremos embalar 40 latas de refresco de cola y 100 latas de referesco de limón en cajas de igual tamaño, lo más grandes posible y sin mezclarlas. ¿Cuántas latas pondremos en cada caja?**

MÚLTIPLOS COMUNES A VARIOS NÚMEROS. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Ana va a nadar al polideportivo cada 3 días y Eva cada 4. ¿Cada cuánto tiempo coincidirán en el polideportivo?

- Ana va los días 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27... → Son los múltiplos de 3.
- Eva va los días 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32... → Son los múltiplos de 4.

- 12, 24 ... son los múltiplos comunes de 3 y 4.
- 12 es el múltiplo menor (mínimo) de 3 y 4 y es común a ambos números.
- 12 es el mínimo común múltiplo de 3 y 4 y se expresa así: m.c.m. (3 y 4) = 12.

Ana y Eva coincidirán en el polideportivo cada 12 días.

10 **Halla los 3 primeros múltiplos comunes de:**

a) 5 y 10

c) 4 y 6

b) 9 y 12

d) 8 y 20

11 **Calcula el m.c.m. de los números de cada apartado del ejercicio anterior.**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

MÉTODO PARA EL CÁLCULO DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Hasta ahora el proceso empleado para calcular el m.c.m. es adecuado para números sencillos. Vamos a estudiar un método más directo y para números de cualquier tamaño.

1.º Descomponer los números en factores primos.

2.º Expresar los números como producto de factores primos.

3.º Escoger en ambos números los **factores** que sean **comunes y no comunes** y que tengan el **mayor exponente**.

4.º El producto de esos factores es el m.c.m.

EJEMPLO

Calcula el m.c.m. de 12 y 60.

1.º
$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2.º $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 =$

$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

3.º Factores comunes: 2 y 3

Factores no comunes: 5

Con mayor exponente: $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

4.º m.c.m. (12 y 60) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

12 **Calcula el m.c.m. de los números.**

a) 15 y 20 b) 8 y 12 c) 10 y 30 d) 9 y 15

13 **Completa la siguiente tabla.**

NÚMEROS	DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS	PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS COMUNES Y NO COMUNES CON MAYOR EXPONENTE	m.c.m.
60 y 40	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $2^3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	120
18 y 30			
	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $2^3 \cdot 5^2$		

14 **Dos aviones de una línea aérea salen siempre del mismo aeropuerto. Uno lo hace cada 10 días y el otro cada 12. Si han salido hoy, ¿cuándo volverán a coincidir en el aeropuerto?**

2 Fracciones

INTRODUCCIÓN

En esta unidad se presenta el concepto de fracción como resultado de varios significados: como parte de un todo o unidad, como valor decimal (cociente) y como operador (fracción de una cantidad).

Los alumnos ya tienen conocimiento de la representación gráfica de las fracciones y las operaciones aritméticas que se realizan con ellas. Se pretende ahora profundizar en aspectos más concretos, como el de fracción equivalente y los métodos de amplificación y simplificación (fracción más sencilla o irreducible). Del mismo modo, la representación gráfica de fracciones mediante dibujos tipo *tarta* o *regleta* ayudará a los alumnos a comprender de una manera más intuitiva la comparación, el orden y la relación entre fracciones.

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones se plantean inicialmente con casos sencillos (igual denominador, en el caso de las sumas y restas).

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *fracción* es una expresión del tipo $\frac{a}{b}$, donde a es el numerador y b es el denominador.
- *Denominador*: número de partes iguales en las que se divide la unidad. *Numerador*: número de partes iguales que tomamos de la unidad.
- Una fracción puede *interpretarse* como parte de la unidad, como valor decimal y como parte de una cantidad.
- Las fracciones se representan mediante *dibujos geométricos*.
- Se pueden obtener fracciones equivalentes a una dada: simplemente multiplicamos (*amplificar*) o dividimos (*simplificar*) el numerador y el denominador por el mismo número.
- Podemos realizar *operaciones aritméticas* con las fracciones: sumar, restar, multiplicar y dividir, así como resolver problemas de la vida real. Es importante tener en cuenta el orden de las operaciones.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Comprender el concepto y los significados de las fracciones.	• Concepto de fracción. Elementos de las fracciones: numerador y denominador. • Representación gráfica. • Lectura y significado de las fracciones.	• Identificación de los términos de las fracciones. • Interpretación de las fracciones: representación gráfica y sus significados numéricos.
2. Identificar y entender las fracciones equivalentes.	• Fracción equivalente. • Obtención de fracciones equivalentes: amplificación y simplificación. Fracción irreducible. • Comparación de fracciones.	• Reconocimiento de fracciones equivalentes. • Obtención de fracciones equivalentes mediante la amplificación y la simplificación. • Comparación de fracciones: común denominador y gráficamente.
3. Realizar operaciones de suma y resta de fracciones.	• Suma y resta de fracciones con igual denominador. • Suma y resta de fracciones con distinto denominador.	• Suma y resta de fracciones con igual y distinto denominador. • Operaciones combinadas. • Resolución de problemas.
4. Realizar operaciones de multiplicación y división de fracciones.	• Multiplicación y división de fracciones. • Producto y división de una fracción por un número.	• Multiplicación y división de fracciones por un número. • Operaciones combinadas. • Resolución de problemas.

COMPRENDER EL CONCEPTO Y LOS SIGNIFICADOS DE LAS FRACCIONES

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Cuando queremos expresar cierta cantidad de algo que es incompleto, o partes de un total, y no podemos escribirla con los números y expresiones que hasta ahora conocemos, utilizamos las **fracciones**.
- Ejemplos de frases en las que utilizamos fracciones son: «Dame la mitad de...», «Nos falta la cuarta parte del recorrido...», «Se inundó la habitación de agua en dos quintas partes...», «Los dos tercios del barril están vacíos...», «Me he gastado la tercera parte de la paga...».
- Una fracción es una expresión matemática en la que se distinguen dos términos: **numerador** y **denominador**, separados por una línea horizontal que se denomina **raya de fracción**.

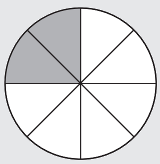
  En general, si *a* y *b* son dos números naturales (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...), una fracción se escribe:

  Raya de fracción → $\dfrac{a}{b}$ ← Numerador / ← Denominador

  $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{4}{9}$ y $\dfrac{1}{2}$ son ejemplos de fracciones.

LA FRACCIÓN COMO PARTE DE LA UNIDAD

Elena abre una caja de quesitos de 8 porciones y se come 2. Podemos expresar esta situación mediante una fracción:



$\dfrac{2}{8}$ → **Numerador:** número de porciones que se come. → **Denominador:** número de porciones de la caja.

– **Significado del denominador:** número de partes iguales en las que se divide la unidad.
– **Significado del numerador:** número de partes que tomamos de la unidad.
– **Significado de la raya de fracción:** partición, parte de, entre, división o cociente.

¿Cómo se leen las fracciones?

SI EL NUMERADOR ES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
SE LEE	Un	Dos	Tres	Cuatro	Cinco	Seis	Siete	Ocho	Nueve	...

SI EL DENOMINADOR ES	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SE LEE	Medios	Tercios	Cuartos	Quintos	Sextos	Séptimos	Octavos	Novenos	Décimos

Si el denominador es mayor que 10, se lee el número seguido del término *-avo*.

SI EL DENOMINADOR ES	11	12	13	14	15	...	20
SE LEE	Onceavos	Doceavos	Treceavos	Catorceavos	Quinceavos	...	Veinteavos

Ejemplos

$\dfrac{3}{8}$ se lee «tres octavos». $\dfrac{6}{9}$ se lee «seis novenos». $\dfrac{12}{21}$ se lee «doce veintiunavos».

1 **Completa la siguiente tabla.**

FRACCIÓN	NUMERADOR	DENOMINADOR	SE LEE
$\frac{4}{9}$			
$\frac{7}{12}$			
$\frac{12}{16}$			
$\frac{10}{25}$			
$\frac{3}{4}$			

2 **Completa la siguiente tabla.**

FRACCIÓN	$\frac{6}{10}$			
NUMERADOR	6			
DENOMINADOR	10			
SE LEE		Once sextos	Quince treintavos	Dos quintos

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FRACCIONES

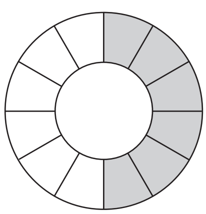
Para dibujar y/o representar gráficamente las fracciones seguimos estos pasos.

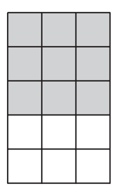
1.º Elegimos el tipo de dibujo: círculo, rectángulo, cuadrado, triángulo (normalmente es una figura geométrica).

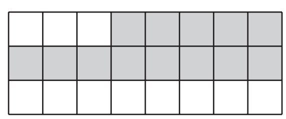
2.º Dividimos la figura en tantas partes iguales como nos indica el denominador.

3.º Coloreamos, marcamos o señalamos las partes que nos indica el numerador.

3 **Escribe la fracción que representa la parte sombreada de los gráficos.**

a) 

b) 

c) 

LA FRACCIÓN COMO VALOR DECIMAL

Al dividir el numerador entre el denominador se obtiene un número decimal, que es el valor numérico de la fracción.

Si quiero repartir 7 naranjas entre 2 niños $\left(\frac{7}{2}\right)$, ¿cuántas le corresponden a cada uno?

$$\begin{array}{l|l} 7 & 2 \\ \hline 10 & 3{,}5 \\ \ \ 0 & \end{array}$$

- Le tocarían 3 naranjas completas a cada niño.
- Sobra 1 naranja, por lo que, entre dos niños, tocan a media naranja (0,5) cada uno.

$$\boxed{\frac{7}{2} = 7 : 2 = 3{,}5}$$

4 **Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones.**

a) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{15}$ e) $\frac{9}{4}$

b) $\frac{10}{20}$ d) $\frac{5}{10}$ f) $\frac{15}{20}$

5 **Expresa en forma de fracción y halla el valor numérico de estos casos.**

a) Cuatro kilogramos de peras en ocho bolsas.
b) Doce litros de refresco de cola en ocho botellas.
c) Cincuenta litros de agua en cien cantimploras.
d) Tres salchichas para cuatro perros.

LA FRACCIÓN DE UNA CANTIDAD

Un tonel de 20 litros de vino está lleno hasta los dos quintos de su capacidad. ¿Cuántos litros contiene?

Tenemos que hallar lo que vale $\frac{2}{5}$ de 20, es decir, una fracción de una cantidad.

Se puede hacer de dos maneras:

$\boxed{\frac{2}{5} \text{ de } 20}$

a) Se multiplica la cantidad por el numerador y se divide entre el denominador.
b) Se divide la cantidad entre el denominador y se multiplica por el numerador.

Lo comprobamos:
a) $(20 \cdot 2) : 5 = 40 : 5 = 8$ litros contiene el tonel.
b) $(20 : 5) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$ litros contiene el tonel.

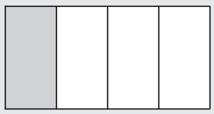
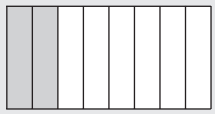
6 **En una excursión de senderismo los alumnos de 2.º ESO han realizado los $\frac{2}{3}$ de la marcha programada, que es de 6.000 metros de longitud. ¿Qué distancia han recorrido?**

IDENTIFICAR Y ENTENDER LAS FRACCIONES EQUIVALENTES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

FRACCIONES EQUIVALENTES

- Equivalente es sinónimo de «igual», que tiene el mismo valor, o que representa la misma cantidad.
  Así, $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$ son fracciones equivalentes.
- Tienen el mismo valor: $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$ $\qquad$ $\frac{2}{8} = 2 : 8 = 0{,}25$
- Representan la misma cantidad:

$\frac{1}{4}$  $\frac{2}{8}$ 

- En general, para comprobar si dos fracciones son equivalentes se multiplica en cruz, obteniendo el mismo resultado.

$$\frac{1}{4} \; \frac{2}{8} \qquad \underbrace{1 \cdot 8}_{8} = \underbrace{4 \cdot 2}_{8}$$

1 **Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones *(utiliza el criterio del valor numérico)*.**

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{12}$

b) $\frac{3}{6}$ y $\frac{9}{18}$

2 **Comprueba si son equivalentes las fracciones *(utiliza la representación gráfica)*.**

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$

b) $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$

3 **Halla el término que falta para que sean equivalentes estas fracciones.**

a) $\frac{\quad}{2} = \frac{8}{16} = \frac{\quad}{12}$

c) $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{20} = \frac{6}{\quad}$

b) $\frac{\quad}{7} = \frac{3}{21} = \frac{2}{\quad}$

d) $\frac{3}{8} = \frac{6}{\quad} = \frac{\quad}{40}$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES

- Si se multiplica o se divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una fracción equivalente y el valor de la fracción no varía.
- $\frac{2}{5}$ *multiplicamos numerador y denominador por 3:* $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{6}{15} \rightarrow 2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$
- $\frac{18}{12}$ *dividimos numerador y denominador entre 6:* $\frac{18 : 6}{12 : 6} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{18}{12} \times \frac{3}{2} \rightarrow 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3$

  – Si multiplicamos, se utiliza el término **amplificar**.
  – Si dividimos, se utiliza el término **simplificar**. Una fracción que no se puede simplificar se llama **fracción irreducible**.

4 **Escribe fracciones equivalentes a la dada mediante amplificación *(multiplica en el numerador y el denominador por el mismo número)*.**

a) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{} = \frac{4}{} = \frac{}{36} = \frac{}{}$

b) $\frac{2}{5} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

c) $\frac{5}{7} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

d) $\frac{3}{2} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

5 **Escribe fracciones equivalentes a la dada mediante simplificación *(divide en el numerador y el denominador entre el mismo número)*.**

a) $\frac{20}{40} = \frac{10}{20} = \frac{5}{}$

b) $\frac{20}{30} = \frac{}{} = \frac{}{}$

c) $\frac{48}{16} = \frac{24}{} = \frac{}{}$

d) $\frac{30}{35} = \frac{}{} = \frac{}{}$

6 **Escribe 5 fracciones equivalentes a:**

a) $\frac{7}{11}$

b) $\frac{4}{10}$

7 **Escribe.**

a) Una fracción equivalente a $\frac{2}{4}$ y que tenga 6 como numerador.

b) Una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ y que tenga 15 como denominador.

8 **Completa la siguiente tabla.**

FRACCIÓN	$\frac{20}{30}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{7}{9}$
¿ES IRREDUCIBLE?				
FRACCIONES EQUIVALENTES (simplificación)				

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Jorge, Araceli y Lucas han comprado el mismo número de sobres de cromos. Jorge ha pegado los dos tercios de los cromos, Araceli la mitad y Lucas los tres cuartos. ¿Quién ha pegado más cromos?

Los pasos que hay que seguir son:

1.º Obtener fracciones equivalentes y encontrar aquellas que tengan el mismo denominador.

2.º Comparar sus numeradores. La fracción que tenga mayor numerador será la mayor.

1.º Jorge: $\frac{2}{3}$ Fracciones equivalentes: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15}, \ldots$

Araceli: $\frac{1}{2}$ Fracciones equivalentes: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14}, \ldots$

Lucas: $\frac{3}{4}$ Fracciones equivalentes: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{6}, \ldots$

$\frac{8}{12}, \frac{6}{12}$ y $\frac{9}{12}$ tienen el mismo denominador.

2.º Ordenamos las fracciones, de mayor a menor, con el símbolo «mayor que», >.

$$\frac{9}{12} > \frac{8}{12} > \frac{6}{12} \rightarrow \frac{3}{4} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

Lucas fue el que pegó más cromos, luego Jorge y, por último, Araceli.

9 **Ordena, de menor a mayor (<), las siguientes fracciones:** $\frac{4}{20}, \frac{8}{20}, \frac{6}{20}, \frac{5}{20}, \frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20}, \frac{10}{20}$.

10 **Una herencia se ha repartido de esta manera entre tres hermanos: Pedro,** $\frac{1}{4}$; **Carmen,** $\frac{7}{12}$, **y Olga,** $\frac{1}{6}$.

a) ¿A quién le toca la mayor parte de la herencia?

b) ¿Y a quién le toca la menor?

REALIZAR OPERACIONES DE SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

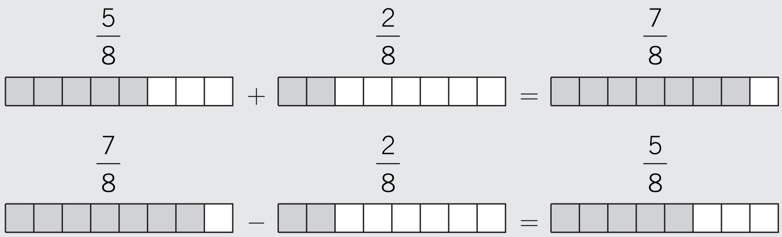
NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

Para sumar o restar fracciones con igual denominador, se suman o se restan los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

$$\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5+2}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\frac{7}{8}-\frac{2}{8}=\frac{7-2}{8}=\frac{5}{8}$$



1 **Calcula.**

a) $\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{}{}$

b) $\frac{6}{8}-\frac{3}{8}=\frac{}{}$

c) $\frac{6}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{}{}$

d) $\frac{4}{7}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}=\frac{}{}$

e) $\frac{3}{13}+\frac{4}{13}+\frac{}{13}=\frac{9}{}$

f) $\frac{4}{11}+\frac{6}{11}-\frac{}{11}=\frac{5}{}$

2 **Haz estas operaciones.**

a) $\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{9}=$

b) $\frac{17}{9}-\left(\frac{12}{9}-\frac{10}{9}\right)=$

c) $\left(\frac{15}{10}-\frac{6}{10}\right)-\frac{5}{10}=$

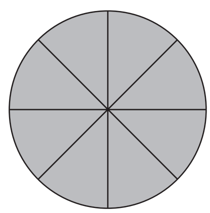
d) $\frac{5}{8}+\left(\frac{7}{8}-\frac{4}{8}\right)=$

3 **De una tarta de frambuesa, Carmen come los dos octavos, Luis los tres octavos y Clara un octavo.**

a) ¿Cuántos octavos se han comido entre los tres?

b) Eva llegó tarde a la merienda. ¿Cuánto le dejaron?

Expresa el problema numérica y gráficamente.



4 **En una bolsa hay 50 cromos: $\frac{24}{50}$ de la bolsa son de automóviles, $\frac{16}{50}$ son de aviones y el resto son de motos. Calcula.**

a) La fracción de cromos de automóviles y aviones.

b) La fracción de cromos de motos.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR

Para sumar o restar fracciones con distinto denominador, se siguen estos pasos.

1.º Buscamos fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

2.º Sumamos o restamos los numeradores, dejando el mismo denominador.

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\left\{\begin{array}{l}\text{Equivalentes a } \frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{12}}=\frac{4}{16}=\frac{5}{20}\ldots \\ \\ \text{Equivalentes a } \frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{12}}=\frac{10}{15}\ldots\end{array}\right\} \frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$$

Observa que 12 es el menor múltiplo común de 4 y 3 (m.c.m.).

$$\frac{7}{5}-\frac{3}{4}=\left\{\begin{array}{l}\text{Equivalentes a } \frac{7}{5}=\frac{14}{10}=\frac{21}{15}=\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{20}}=\frac{35}{25}\ldots \\ \\ \text{Equivalentes a } \frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{20}}\ldots\end{array}\right\} \frac{7}{5}-\frac{3}{4}=\frac{28}{20}-\frac{15}{20}=\frac{28-15}{20}=\frac{13}{20}$$

Observa que 20 es el menor múltiplo común de 5 y 4 (m.c.m.).

5 **Completa y realiza las siguientes operaciones.**

a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{4}=\frac{}{20}+\frac{}{20}=$

c) $\frac{7}{9}-\frac{4}{6}=\frac{}{18}-\frac{}{18}=$

e) $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=$

b) $\frac{4}{6}-\frac{3}{9}=$

d) $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=$

f) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=$

6 **Calcula** ***(en operaciones combinadas, primero se efectúan los paréntesis).***

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{15}=$

c) $\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{5}{10}=$

b) $\frac{7}{3}-\left(\frac{12}{9}-\frac{10}{9}\right)=$

d) $\frac{5}{8}+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{8}\right)=$

7 **De un barril de cerveza, David saca dos quintos de su contenido y Amparo un tercio. Exprésalo numérica y gráficamente.**

a) ¿Qué fracción de cerveza sacaron entre los dos?

b) ¿Quién sacó más cerveza?

2 OBJETIVO 4
REALIZAR OPERACIONES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

PRODUCTO DE FRACCIONES

El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y el denominador, el producto de los denominadores (producto en paralelo).

EJEMPLO

$\mathbf{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$ Siempre que sea posible, se simplifica el resultado: $\frac{6}{20} = \frac{6 : 2}{20 : 2} = \frac{3}{10}$.

1 **Calcula los siguientes productos de fracciones.**

a) $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} =$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} =$

b) $\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{7} =$

d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} =$

2 **Calcula y simplifica el resultado siempre que sea posible.**

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{} =$

c) $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2} =$

b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} =$

d) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

3 **En una caja de relojes, $\frac{2}{5}$ son de color azul y $\frac{3}{4}$ de esos relojes azules son sumergibles. ¿Qué fracción del total representan los relojes azules sumergibles?**

$\frac{3}{4}$ **de** $\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{}{}$

PRODUCTO DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO

Para multiplicar una fracción por un número, se multiplica el número por el numerador de la fracción y se deja el mismo denominador (todo número está dividido por la unidad).

EJEMPLO

$$\mathbf{\frac{2}{5} \cdot 4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{5}$$

4 **Calcula y simplifica el resultado siempre que sea posible.**

a) $\frac{2}{3} \cdot 6 =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{10} \cdot 5 =$

5 **Calcula la fracción que falta en cada caso para que se cumpla la igualdad *(si puedes, simplifica).***

a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{}{} = \frac{20}{56} = \frac{}{} = \frac{}{}$

b) $\frac{}{} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{20} = \frac{}{} = \frac{}{}$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{}{} = \frac{1}{9}$

d) $\frac{}{} \cdot \frac{2}{7} = \frac{14}{21} = \frac{}{}$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

La división de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador y denominador es el producto cruzado de los términos de las fracciones dadas (producto en cruz).

EJEMPLO

$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} : \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10}$ Siempre que sea posible, se simplifica el resultado: $\frac{12}{10} = \frac{12 : 2}{10 : 2} = \frac{6}{5}$.

6 **Calcula y simplifica siempre que se pueda.**

a) $\frac{3}{6} : \frac{8}{12} = \frac{3 \cdot 12}{6 \cdot 8} = \frac{}{} = \frac{}{}$

b) $\frac{7}{3} : \frac{1}{2} =$

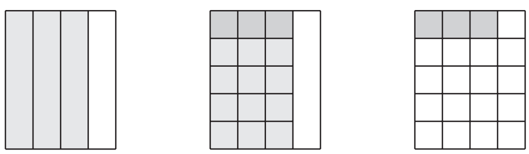
c) $\frac{1}{5} : \frac{3}{6} =$

d) $\frac{4}{6} : \frac{2}{5} =$

e) $\frac{4}{6} : \frac{3}{7} =$

f) $\frac{5}{3} : \frac{5}{3} =$

7 **Queremos repartir tres cuartas partes de una caja de golosinas entre 5 amigos. ¿Qué parte de fracción le corresponde a cada uno?**



$\frac{3}{4} \quad : \quad 5 \quad = \quad \frac{3}{20}$

$\frac{3}{4}$ **dividido entre** $\frac{5}{1} \longrightarrow \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot} = \frac{3}{}$

8 **Calcula.**

a) $\frac{2}{3} : \frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 8} = \frac{}{} =$

b) $\frac{3}{6} : 2 =$

c) $\frac{3}{6} : \frac{2}{7} =$

d) $\frac{2}{7} : \frac{3}{6} =$

e) $\frac{2}{5} : 2 =$

f) $\frac{6}{3} : 3 =$

9 **Calcula la fracción que falta en cada caso para que se cumpla la igualdad** ***(si puedes, simplifica).***

a) $\frac{5}{8} : \frac{\quad}{\quad} = \frac{15}{8}$

b) $\frac{\quad}{\quad} : \frac{4}{3} = \frac{12}{20} =$

c) $\frac{\quad}{\quad} : 4 = \frac{10}{12} =$

d) $\frac{4}{3} : \frac{\quad}{\quad} = \frac{8}{6} =$

e) $\frac{\quad}{\quad} : \frac{2}{6} = \frac{36}{10} =$

f) $5 : \frac{\quad}{\quad} = \frac{35}{7} =$

10 **En una fiesta de cumpleaños se han preparado 25 litros de chocolate. ¿Cuántas tazas de un cuarto de litro se pueden distribuir?**

Bidón

Taza

11 **Con una botella de refresco de cola, cuya capacidad es de tres cuartos de litro, se llenan 6 vasos. ¿Qué fracción de litro cabe en cada vaso?** ***(Simplifica, si se puede, el resultado.)***

Refresco de cola

Vaso

12 **Realiza las siguientes operaciones combinadas de fracciones y simplifica siempre que sea posible.** ***(Recuerda el orden de las operaciones: paréntesis, multiplicaciones y/o divisiones, sumas y/o restas.)***

a) $\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\right) =$

b) $\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) =$

c) $\left(\frac{7}{3} : \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) =$

3 Números decimales

INTRODUCCIÓN

En esta unidad estudiamos el sistema de numeración decimal, e introducimos las denominaciones de la parte decimal: décima, centésima y milésima, así como su equivalencia con respecto a la unidad y las propias que se establecen entre ellas.

También podemos ordenar y colocar los números decimales en la recta numérica, buscar valores intermedios entre varios dados y realizar comparaciones entre ellos.

A partir de la relación entre las fracciones y sus valores numéricos, introducimos los conceptos de números decimales exactos, inexactos y periódicos.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Podemos *representar y ordenar los números decimales* en la recta numérica.
- Para *comparar dos o más números decimales*, primero comparamos la parte entera y luego la parte decimal de manera progresiva.
- Podemos *aproximar un número decimal* a las unidades, a las décimas, a las centésimas...
- Para *obtener la expresión decimal de una fracción*, dividimos el numerador entre el denominador.
- Podemos *realizar operaciones* de suma, resta, multiplicación y división de números decimales.

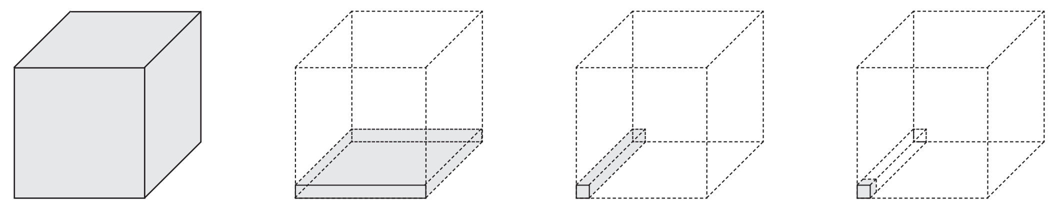
OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Comprender el concepto de número decimal.	• Significado de los números decimales. • Representación en la recta numérica. • Orden y comparación. • Aproximación de números decimales.	• Identificación de números decimales. • Comparación y ordenación de números decimales, numérica y gráficamente. • Aproximación de números decimales.
2. Comprender la relación entre fracción y número decimal.	• Tipos de números decimales: exactos y periódicos. • Paso de número decimal exacto a fracción. Fracción irreducible.	• Obtención de números decimales a partir de una fracción. • Conversión de un número decimal a fracción.
3. Realizar operaciones con números decimales.	• Suma y resta de números decimales. • Multiplicación y división de números decimales. • Multiplicación y división de números decimales por la unidad seguida de ceros.	• Resolución de problemas por medio de operaciones aritméticas con números decimales.

COMPRENDER EL CONCEPTO DE NÚMERO DECIMAL

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS DECIMALES

- En nuestra vida diaria medimos, calculamos, comparamos, etc. Hablamos de cantidades que no son exactas. Para expresar correctamente estas cantidades, utilizamos los números decimales.
- Ejemplos: 3,60 €; 2,5 kg de manzanas; 78,9 km de distancia; 0,7 m de altura.
- Nuestro sistema de numeración es **decimal**: cada 10 unidades de un orden forman una unidad del orden superior.



1 unidad = 10 décimas = 100 centésimas = 1.000 milésimas **1 U = 10 d = 100 c = 1.000 m**

1 décima = 10 centésimas = 100 milésimas **1 d = 10 c = 100 m**

1 centésima = 10 milésimas **1 c = 10 m**

1 **Un número decimal lo podemos descomponer de varias formas y proceder a su lectura. Fíjate en los ejemplos y completa las siguientes tablas.**

NÚMERO	DESCOMPOSICIÓN 1	LECTURA 1
3,156	3 U + 1 d + 5 c + 6 m	3 unidades, 1 décima, 5 centésimas, 6 milésimas
0,28		
152,72		

NÚMERO	DESCOMPOSICIÓN 2	LECTURA 2
3,156	3 U + 156 m	3 unidades y 156 milésimas
0,28		
152,72		

2 **Expresa en cada caso la equivalencia que se indica.**

a) 15 centésimas = ...0,15 u.... = ... milésimas
b) 9 décimas = ... = ... centésimas
c) 200 centésimas = ... = ... milésimas
d) 300 milésimas = ... = ... décimas
e) 100 centésimas = ... = ... unidades

3 **Sitúa los siguientes números decimales en la tabla adjunta.**

a) Veinticuatro unidades treinta y cinco centésimas.
b) Diez unidades doscientas doce milésimas.
c) Ochenta y dos centésimas.
d) Doscientas noventa y una unidades quinientas cincuenta y ocho milésimas.
e) Ciento treinta y seis milésimas.
f) Cuatrocientas unidades diecinueve milésimas.

CENTENAS C	DECENAS D	UNIDADES U	,	DÉCIMAS d	CENTÉSIMAS c	MILÉSIMAS m
	2	4	,	3	5	

NÚMEROS DECIMALES EN LA RECTA NUMÉRICA

- Los números decimales se pueden representar sobre la recta numérica.
- El número 2,6 está comprendido entre el 2 y el 3.

2 2,1 2,2 2,3 2,4 2,5 **2,6** 2,7 2,8 2,9 **3**

Si dividimos una unidad en 10 partes iguales, cada parte es una **décima**.

- El número 2,66 está comprendido entre el 2,6 y el 2,7.

2,6 2,61 2,62 2,63 2,64 2,65 **2,66** 2,67 2,68 2,69 **2,7**

Si dividimos una décima en 10 partes iguales, cada parte es una **centésima**.

- El número 2,663 está comprendido entre el 2,66 y el 2,67.

2,66 2,661 2,662 **2,663** 2,664 2,665 2,666 2,667 2,668 2,669 **2,67**

Si dividimos una centésima en 10 partes iguales, cada parte es una **milésima**.

- Entre dos números decimales, siempre podemos encontrar otros números decimales.

4 **Representa en la recta numérica los números decimales.**

a) 3,5 b) 3,1 c) 3,8 d) 3,9 e) 3,3

3 4

5 **Completa las siguientes series de números decimales.**

a) 0,5 - 1 - 1,5 - .... - .... - .... - ....

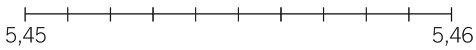
b) 4,37 - 4,40 - 4,43 - .... - .... - .... - ....

c) 5,15 - 5,20 - 5,25 - .... - .... - .... - ....

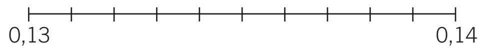
d) 8,28 - 8,23 - 8,18 - .... - .... - .... - ....

6 **Halla dos números decimales comprendidos entre los dados y dibújalos en la recta numérica.**

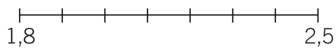
a) 5,45 y 5,46



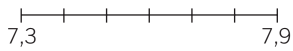
c) 0,13 y 0,14



b) 1,8 y 2,5



d) 7,3 y 7,9



ORDEN Y COMPARACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Para comparar números decimales, se siguen estos pasos.

1.º Comparamos la parte entera. Es mayor el número que tiene mayor parte entera.

2.º Comparamos la parte decimal. Si la parte entera es igual, se comparan las décimas, las centésimas, las milésimas, siendo mayor el número con mayor parte decimal, cifra a cifra.

Mayor que $>$ Menor que $<$

EJEMPLO

4,56 > 3,7 porque: 4 > 3 (parte entera)

8,37 > 8,34 porque: 8 = 8 (parte entera)
3 = 3 (décimas)
7 > 4 (centésimas)

7 **Ordena, de menor a mayor (<), los siguientes números.**

5,05 – 6,01 – 7,12 – 0,34 – 2,61 – 5,07 – 1,11

8 **La estatura (en m) de 10 alumnos de 2.º ESO es:**

1,55 – 1,59 – 1,52 – 1,63 – 1,60 – 1,58 – 1,65 – 1,61 – 1,67 – 1,70

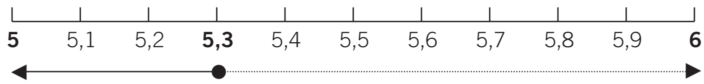
Ordénalo, de mayor a menor (>).

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

- Aproximar un número decimal es considerar el número más próximo a él.
- Para aproximar un número se suprimen las cifras situadas a la derecha. Si la cifra eliminada es mayor que 5, a la última cifra se le suma uno.
- Podemos aproximar a las unidades, a las décimas, a las centésimas...

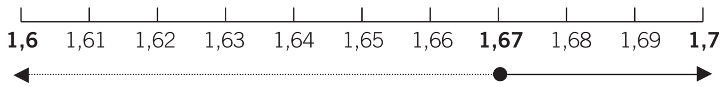
EJEMPLO

Aproxima 5,3 a las unidades. El resultado es 5, ya que 5,3 está más cerca de 5 que de 6.



5,**3** ⟶ $3 < 5$
5,3 se aproxima más a 5.

Aproxima 1,67 a las décimas. El resultado es 1,7, ya que 1,67 está más cerca de 1,7 que de 1,6.



1,6**7** ⟶ $7 > 5$
1,67 se aproxima más a 1,7.

9 **Aproxima a las unidades los siguientes números.**

NÚMERO DECIMAL	NÚMERO APROXIMADO A LAS UNIDADES
34,2	
7,8	
0,6	
3,7	
12,52	

10 **Aproxima a las décimas.**

NÚMERO DECIMAL	NÚMERO APROXIMADO A LAS DÉCIMAS
0,56	
17,24	
10,68	
3,47	
2,92	

11 **Juan pesa 52,383 kg. Aproxima su peso a:**

a) Las unidades
b) Las décimas
c) Las centésimas

3 OBJETIVO 2

COMPRENDER LA RELACIÓN ENTRE FRACCIÓN Y NÚMERO DECIMAL

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TIPOS DE NÚMEROS DECIMALES

En una fracción, al dividir el numerador entre el denominador se obtiene un número decimal.

- Si el **resto es cero**, el número decimal es **exacto**.

$$\frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \frac{9}{2} = 4{,}5 \qquad \frac{12}{10} = 1{,}2$$

- Si el **resto no es cero**, obtenemos un número con infinitas cifras decimales.

  Un número **periódico** tiene infinitas cifras decimales que se repiten siempre.

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots \qquad \frac{12}{11} = 1{,}09090909\ldots$$

Un pequeño arco $\frown$ sobre las cifras decimales indica las cifras que se repiten periódicamente.

$$0{,}\overset{\frown}{3} = 0{,}33333\ldots \qquad 1{,}\overset{\frown}{09} = 1{,}09090909\ldots$$

1 **Indica qué tipo de número decimal obtenemos en las siguientes divisiones.**

FRACCIÓN	RESULTADO	TIPO DE NÚMERO DECIMAL
$\frac{15}{12}$		
$\frac{11}{3}$		
$\frac{7}{14}$		
$\frac{9}{99}$		

2 **Expresa los números decimales periódicos de forma abreviada.**

NÚMERO	NÚMERO ABREVIADO	PARTE ENTERA	PARTE DECIMAL PERIÓDICA
4,55555...	$4{,}\overset{\frown}{5}$	4	$\overset{\frown}{5}$
2,343434...			
1,187187...			
11,66666...			
91,878787...			

3 **Rodea con un círculo el número decimal periódico que corresponde a $4{,}\overset{\frown}{87}$.**

a) 4,807807807...

b) 4,87878787...

c) 4,78787878...

d) 47,87878787...

PASO DE NÚMERO DECIMAL EXACTO A FRACCIÓN

Un número decimal se puede expresar como fracción.

Para ello, se coloca el número sin la coma en el numerador, y en el denominador se pone la unidad seguida de tantos ceros como cifras hay a la derecha de la coma.

EJEMPLO

$$0{,}4 = \frac{4}{10} \qquad 15{,}26 = \frac{1.526}{100}$$

Podemos **simplificar las fracciones** hasta obtener la fracción más simple posible, llamada **fracción irreducible**.

Para hallar la fracción irreducible dividimos el numerador y el denominador entre el mismo número.

$$0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5} \qquad 15{,}26 = \frac{1.526}{100} = \frac{1.526:2}{100:2} = \frac{763}{50}$$

4 **Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales.**

a) $5{,}6 = \frac{56}{10}$

b) $10{,}86 =$

c) $3{,}8 =$

d) $3{,}875 =$

e) $0{,}2 =$

f) $0{,}034 =$

5 **Expresa en forma de fracción estos números decimales y simplifica (si se puede) hasta obtener la fracción irreducible. Fíjate en el ejemplo.**

a) $3{,}16 =$

$$\frac{316}{100} = \frac{316:2}{100:2} = \frac{158}{50} = \frac{158:2}{50:2} = \frac{79}{25}$$

b) $0{,}66 =$

c) $9{,}125 =$

d) $2{,}8 =$

e) $11{,}22 =$

f) $0{,}014 =$

6 **Escribe las fracciones en forma de número decimal y los números decimales en forma de fracción.**

a) $\frac{43}{10} =$

b) $0{,}006 =$

c) $3{,}004 =$

d) $12{,}84 =$

e) $\frac{52}{1.000} =$

f) $\frac{7}{100} =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 OBJETIVO 3

REALIZAR OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS DECIMALES

Para **sumar o restar** números decimales procedemos del siguiente modo.

1.º Colocamos todos los sumandos en columna, haciendo coincidir las partes enteras y las partes decimales de cada número: centenas con centenas, decenas con decenas, unidades con unidades, comas con comas, décimas con décimas, centésimas con centésimas, milésimas con milésimas, etc.

2.º Se suma o resta como si fueran números naturales, manteniendo la coma en su lugar correspondiente.

EJEMPLO

Calcula. a) 4,7 + 13,56 + 27,03 + 9,2

$$\begin{array}{r} 4{,}7\mathbf{0} \\ 13{,}56 \\ 27{,}03 \\ +\quad 9{,}2\mathbf{0} \\ \hline 54{,}49 \end{array}$$

Se suelen añadir ceros para que todas las cifras tengan el mismo número de decimales.

b) 35,78 − 17,6

$$\begin{array}{r} 35{,}78 \\ -\quad 17{,}6\mathbf{0} \\ \hline 18{,}18 \end{array}$$

Se suelen añadir ceros para que todas las cifras tengan el mismo número de decimales.

1 **Haz las siguientes operaciones.**

a) 12,34 + 4,87 + 55,97 =

d) 1,04 + 0,31 + 51,06 =

b) 109,3 + 81,72 + 66,35 =

e) 77,01 + 44 + 19,58 =

c) (2,46 + 39,55) − (11 + 3,82) =

f) (49,72 − 34,07) + (15 + 23,69) =

2 **Efectúa estas operaciones.**

a) 78,31 − 45,59 =

c) 11,07 − 9,5 =

b) 123,8 − 77,94 =

d) 76 − 39,25 =

3 **Ana y Luis tienen que pintar la valla de su jardín. Ana pinta 2,45 m y Luis pinta 3,8 m. Si la valla tiene una longitud total de 10 m, calcula.**

a) La longitud de valla que han pintado entre los dos.

b) La longitud de valla que les falta por pintar.

4 **María sale un sábado de su casa con 15,62 €. Queda con sus amigos en la hamburguesería y se gasta 3,89 €, luego va al cine, paga su entrada de 4 € y se compra una bolsa de palomitas que le cuesta 1,45 €. Si el trayecto del autobús le cuesta 1,05 €, determina.**

a) El dinero total que se ha gastado.

b) ¿Le ha sobrado algo de dinero? En caso afirmativo, indica la cantidad.

c) María tiene ahorrados 6,75 €. Uniendo sus ahorros con lo que le ha sobrado, ¿podrá comprar un CD que cuesta 12,40 €?

Para **multiplicar** dos números decimales seguimos estos pasos.

1.º Los multiplicamos como si fueran números naturales.

2.º Se coloca la coma, separando de derecha a izquierda en el resultado tantas posiciones como decimales tengan entre los dos factores.

EJEMPLO

$$\begin{array}{r} 5{,}\mathbf{18} \\ \times \quad 2{,}\mathbf{6} \\ \hline 3108 \\ 1036 \\ \hline 13{,}\mathbf{468} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23{,}\mathbf{5} \\ \times \quad 81{,}\mathbf{7} \\ \hline 1645 \\ 235 \\ 1880 \\ \hline 1919{,}\mathbf{95} \end{array}$$

5 **Calcula los siguientes productos.**

a) 5,67 · 2,9 =

b) 39,412 · 3,4 =

c) 13,8 · 45,73 =

d) 92 · 4,68 =

ADAPTACIÓN CURRICULAR

6 **Pablo va al supermercado a comprar una serie de productos. Tiene 17 € y efectúa las siguientes compras.**

- 2,5 kilogramos de naranjas que valen 0,70 €/kg.
- 0,9 kilogramos de kiwis que valen 1,50 €/kg.
- 4 cartones de leche a 0,65 €/cartón.
- 2 barras de pan a 0,30 €/barra.
- 5 latas de refresco de cola a 0,34 €/lata.
- 3 paquetes de detergente a 2,13 €/paquete.

Calcula cuánto le ha costado la compra. Al pagar en caja, ¿cuánto dinero le ha sobrado?

7 **Sabiendo que 458 · 69 = 31.602, coloca el separador de miles y la coma decimal en su lugar correspondiente.**

a) 45,8 · 69 = 3 1 6 0 2

b) 45,8 · 0,69 = 3 1 6 0 2

c) 4,58 · 0,69 = 3 1 6 0 2

d) 4,58 · 6,9 = 3 1 6 0 2

e) 0,458 · 6,9 = 3 1 6 0 2

f) 458 · 6,9 = 3 1 6 0 2

Un caso especial de la multiplicación de números decimales es **multiplicar por la unidad seguida de ceros**, es decir, por 10, 100, 1.000...

Para hacerlo se desplaza la coma a la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad: 1, 2, 3...

58,042 · 1**00** = 5.8**04,**2

91,58 · 1.**000** = 91.**580**

8 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) 5,8 · 10 =

b) 1,4 · 1.000 =

c) 0,46 · 100 =

d) 46,301 · 100 =

e) 59,3 · 1.000 =

f) 2,73 · 10 =

9 **Indica la unidad seguida de ceros que corresponde a cada operación.**

a) 23,2 · .... = 23.200

b) 0,51 · .... = 51

c) 0,9 · .... = 900

d) 14,85 · .... = 148,5

e) 0,812 · .... = 81.200

f) 8,2946 · .... = 8.294,6

10 **Realiza las siguientes operaciones combinadas.**

a) (12,46 + 3,6) · (6,7 − 2,8) =

b) 3,5 · (45,76 − 38,72) =

c) (4,76 · 23,4) + (19,37 − 16,03) =

d) 3,4 · (35,92 + 53) =

DIVISIÓN DECIMAL DE DOS NÚMEROS NATURALES

1.º Si la **división es exacta**, el resto es cero, $r = 0$. *(Recuerda que* $D = d \cdot c + r$*)*

2.º Si la **división no es exacta**, el resto es distinto de cero y menor que el divisor, $r \neq 0$ y $r < d$.

3.º Se puede seguir dividiendo, añadiendo un cero al resto y poniendo una coma decimal en el cociente, hasta obtener una división con resto cero o aproximar con una, dos, tres o más cifras decimales.

EJEMPLO

```
2773 |59          265 |50   ------->   265   |50
 413  47          015  5               0150   5,3
   0                                     00
```

DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS DECIMALES

Existen tres casos:

1.º **Dividendo decimal y divisor natural.** Se divide como si fuera una división normal, pero al bajar la primera cifra decimal se pone la coma en el cociente.

2.º **Dividendo natural y divisor decimal.** Se suprime la coma del divisor y se añaden tantos ceros al dividendo como cifras decimales tenga el divisor.

3.º **Dividendo y divisor decimales.** Se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo tantos lugares a la derecha como cifras decimales tiene el divisor. Si es necesario, se añaden ceros al dividendo.

EJEMPLO

Dividendo decimal y divisor natural:

```
9,6 |2
1 6  4,8
  0
```

Dividendo natural y divisor decimal:

```
441  |3,6

4410 |36
081   122,5
 090
  180
   00
```

Dividendo y divisor decimales:

```
1,28 |0,2

128  |20
080   6,4
 00
```

11 **Calcula las siguientes divisiones.**

a) 56,4 : 12 =

b) 7.875 : 63 =

c) 1.158 : 20 =

d) 152 : 2,5 =

e) 7,14 : 0,6 =

f) 25,8 : 2,4 =

12 **Haz las divisiones y aproxima el cociente hasta las centésimas.**

a) 10 : 6 =
b) 99 : 44 =
c) 25 : 3 =
d) 17,4 : 3,1 =

Un caso especial de la división de números decimales consiste en **dividir entre la unidad seguida de ceros**, es decir, entre 10, 100, 1.000...
Para hacerlo se desplaza la coma a la izquierda tantos lugares como ceros tenga la unidad: 1, 2, 3...

EJEMPLO

958,3 : 1**00** = 9**,58**3
32,7 : 1**000** = 0**,032**7
1,9 : 1**0** = 0**,1**9

13 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) 45,8 : 10 =
b) 92.345,4 : 1.000 =
c) 13,45 : 100 =
d) 0,51 : 10 =
e) 5.917,36 : 1.000 =
f) 238 : 10 =

14 **Indica la unidad seguida de ceros que corresponda a cada operación.**

a) 432,64 : .... = 4,3264
b) 11,46 : .... = 1,146
c) 34.800 : .... = 34,8
d) 39 : .... = 0,39
e) 100 : .... = 0,1
f) 294,6 : .... = 2,946

15 **He comprado 15 CD por 11,25 €. ¿Cuánto me ha costado cada CD?**

16 **Luis, Ana y Berta han comprado un juego de ordenador por 46,53 €. Si los tres han aportado la misma cantidad de dinero, ¿cuál ha sido la aportación de cada uno?**

17 **Una autopista tiene una longitud total de 560 km. Cada 20 km se han instalado puentes para el cambio de sentido, y cada 32 km hay una gasolinera. Calcula cuántos puentes y cuántas gasolineras tiene la carretera.**

4 Sistema sexagesimal

INTRODUCCIÓN

Se introduce a continuación un nuevo sistema de numeración, el sistema sexagesimal *(sexagésimo-60)*. Partiendo de los conocimientos de la medida de los ángulos y, especialmente, de las unidades de tiempo: hora, minuto y segundo, se explica a los alumnos un nuevo sistema de contar y de medida.

Además, conocer las equivalencias y convertir las unidades de tiempo en situaciones cotidianas ayudará a la valoración del tiempo en la vida diaria de los alumnos.

Mediante la resolución de problemas y la realización de diversas operaciones aritméticas en el sistema sexagesimal, los alumnos aprenderán a estimar el tiempo en cuanto a su cantidad y duración, aplicando los algoritmos necesarios para resolver problemas reales.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- En el sistema sexagesimal, *60 unidades de un orden forman una unidad de orden superior*. Este sistema sirve para medir los ángulos y tiempos.
- El grado es la unidad principal para medir ángulos. Para medir ángulos con más precisión, se utiliza el *grado,* el *minuto* y el *segundo*.
  $1° = 60'$ $1' = 60''$ $1° = 3.600''$
- Para medir períodos de tiempo menores que el día utilizamos la *hora,* el *minuto* y el *segundo*.
  1 h = 60 min 1 min = 60 s 1 h = 3.600 s
- En el sistema sexagesimal podemos *realizar operaciones* de suma, resta, multiplicación y división, así como resolver problemas de la vida real. Es importante tener en cuenta el orden de las operaciones, el agrupamiento de cifras y las conversiones necesarias dentro del sistema sexagesimal.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Utilizar el sistema sexagesimal para medir ángulos y tiempos.	• Unidades de medida de ángulos: grado, minuto y segundo. • Unidades de medida de tiempo: hora, minuto y segundo. • Expresiones complejas e incomplejas.	• Identificación y aplicación de las equivalencias entre unidades de medida de ángulos y tiempos. • Paso de expresiones complejas a incomplejas, y viceversa. • Resolución de problemas.
2. Realizar operaciones de suma y resta en el sistema sexagesimal.	• Operaciones de suma y resta de medidas de ángulos y tiempos.	• Empleo y uso de las técnicas adecuadas para la realización de operaciones. • Resolución de problemas.
3. Realizar multiplicaciones y divisiones por un número.	• Operaciones de multiplicación y división por un número de medidas de ángulos y tiempos en el sistema sexagesimal.	• Empleo y uso de las técnicas adecuadas para la realización de operaciones. • Resolución de problemas.

4 OBJETIVO 1
UTILIZAR EL SISTEMA SEXAGESIMAL PARA MEDIR ÁNGULOS Y TIEMPOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

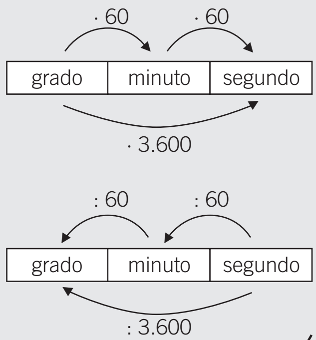
- **Sexagésimo** hace referencia a cada una de las **60 partes** en las que se divide un total.
- **Sexagesimal** es un término que se aplica al sistema de contar o de subdividir de **60 en 60**.

En el **sistema sexagesimal**, 60 unidades de un orden forman una unidad de orden superior.
Este sistema sirve para medir los ángulos y tiempos.

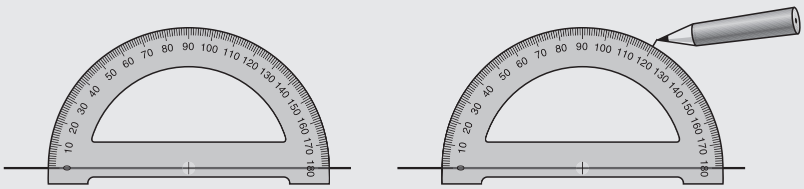
MEDIDA DE ÁNGULOS

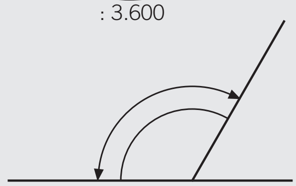
- El **grado** es la unidad principal para medir ángulos.
- Para medir ángulos con más precisión, se utilizan, junto con los grados, el **minuto** y el **segundo**.

Un grado se escribe **1º**. **1º = 60'**
Un minuto se escribe **1'**. **1' = 60"**
Un segundo se escribe **1"**. **1º = 3.600"** (60 · 60)



- Los babilonios dividieron el ángulo completo en 360º.
- Un ángulo llano mide 180º. Un ángulo recto mide 90º.
- Actualmente, para medir los ángulos, utilizamos el transportador.





1 **Completa la siguiente tabla.**

GRADOS (°)	MINUTOS (')	SEGUNDOS ('')
15	15 · 60 =	15 · 3.600 =
60		
100		
278		
360		

2 **Completa esta tabla.**

GRADOS (°)	MINUTOS (')	SEGUNDOS ('')
		32.400
	600	
		3.600
		61.200
	120	

3 **Con la ayuda del transportador, dibuja las siguientes amplitudes de ángulos.**

a) 60° b) 40° c) 90° d) 150°

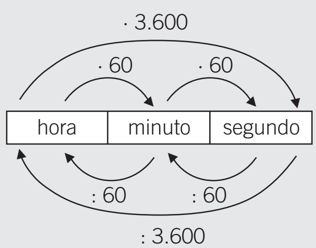
4 **Escribe cómo se leen las medidas de estos ángulos.**

ÁNGULO	SE LEE
18° 39' 43"	
31° 9' 22"	

MEDIDA DE TIEMPOS

- Las unidades para medir el tiempo son el milenio (1.000 años), siglo (100 años), lustro (5 años), año, mes, semana, día, hora, minuto y segundo.
- Para medir períodos de tiempo menores que el día utilizamos la **hora**, el **minuto** y el **segundo**.

  Una hora se escribe **1 h**. **1 h = 60 min**
  Un minuto se escribe **1 min**. **1 min = 60 s**
  Un segundo se escribe **1 s**. **1 h = 3.600 s** (60 · 60)



- Recuerda también que:
  – Una semana tiene 7 días.
  – Un día tiene 24 horas.

5 **Completa la siguiente tabla.**

HORAS (h)	MINUTOS (min)	SEGUNDOS (s)
7	7 · 60 = 420	7 · 3.600 =
9		
16		
24		
72		

6 **Completa la siguiente tabla.**

HORAS (h)	MINUTOS (min)	SEGUNDOS (s)
	30	
		10.800
	600	
		43.200
	60	
	120	

7 **Expresa en segundos.**

a) 3 h y 45 min

c) 2 h y 20 min

b) Un cuarto de hora

d) 1 h y 23 min

EXPRESIONES COMPLEJAS E INCOMPLEJAS

Una medida de tiempo puede ser expresada de dos maneras:

- De forma **compleja**, utilizando **varias unidades**.
  1 h 35 min 10 s; 50 min 26 s
- De forma **incompleja**, utilizando **una sola unidad**.
  3.790 s; 2 h; 48 min

Para pasar una medida de una forma a otra, en el sistema sexagesimal, procedemos así:

- **De forma compleja a incompleja:** formamos grupos iguales de la unidad que nos piden multiplicando por 60.

Expresa 2 h 50 min 15 s en segundos.

$$\begin{array}{lr} 2\text{ h} = 2 \cdot 60 \cdot 60 = & 7.200\text{ s} \\ 50\text{ min} = 50 \cdot 60 = & 3.000\text{ s} \\ 15\text{ s} \longrightarrow & 15\text{ s} \\ \hline & 10.215\text{ s} \end{array}$$

$\boxed{2\text{ h } 50\text{ min } 15\text{ s} = 10.215\text{ s}}$

- **De forma incompleja a compleja:** dividimos sucesivamente la medida y los cocientes sucesivos entre 60.

Expresa 10.215 segundos en horas, minutos y segundos.

$$\begin{array}{l|l} 10215 & 60 \\ \hline \ \ 421 & 170 \ \ \begin{array}{|l} 60 \\ \hline \end{array} \\ \ \ \ \ 0\mathbf{15}\text{ s} & \mathbf{50}\text{ min} \ \ \mathbf{2\text{ h}} \end{array}$$

$\boxed{10.215\text{ s} = 2\text{ h } 50\text{ min } 15\text{ s}}$

8 **Calcula los segundos que hay en:**

a) 3 h 19 min 26 s

b) 4 h 58 min 40 s

c) 1 h 42 min 33 s

d) 59 min 59 s

9 **Expresa en horas, minutos y segundos.**

a) 2.300 s

b) 4.042 s

c) 6.400 s

d) 16.579 s

10 **Expresa en horas y minutos.**

a) 150 minutos

b) 300 minutos

c) 240 minutos

d) 1 día, 3 horas y 30 minutos

11 **Un grifo llena dos botellas de 1 litro de capacidad en un minuto.**

a) ¿Cuántas botellas se pueden llenar en 20 minutos?

b) ¿Y en tres cuartos de hora?

12 **Resuelve.**

a) ¿Cuántos minutos hay en un día?

b) ¿Y cuántas horas hay en una semana?

4 OBJETIVO 2

REALIZAR OPERACIONES DE SUMA Y RESTA EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para **sumar medidas de tiempos o ángulos** se colocan los sumandos agrupados: horas con horas o grados con grados, minutos con minutos y segundos con segundos.

Al operar hay que tener en cuenta estos pasos.

1.° Si los segundos sobrepasan 60, los transformamos en minutos.

2.° Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en horas o en grados.

3.° Procedemos a la suma.

EJEMPLO

Efectúa la suma: 4° 25' 45" + 15° 38' 29".

$$\begin{array}{r} 4^\circ\ 25'\ 45'' \\ +\ 15^\circ\ 38'\ 29'' \\ \hline 19^\circ\ 63'\ 74'' \end{array} \qquad 74'' = 60'' + 14'' = \mathbf{1'} + 14''$$

$$\begin{array}{r} 19^\circ\ 63'\ 14'' \\ +\qquad\quad \mathbf{1'} \\ \hline 19^\circ\ 64'\ 14'' \end{array} \qquad 64' = 60' + 4' = \mathbf{1^\circ} + 4'$$

$$\begin{array}{r} 19^\circ\ 4'\ 14'' \\ +\ \mathbf{1^\circ}\qquad \\ \hline 20^\circ\ 4'\ 14'' \end{array}$$

$4^\circ\ 25'\ 45'' + 15^\circ\ 38'\ 29'' = 20^\circ\ 4'\ 14''$

1 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) 15° 22' 30" + 8° 27' 41"

c) 1° 44' 11" + 5° 16' 9"

b) 50' 43" + 13' 10"

d) 2° 7' + 17° 49' 54"

2 **Un ciclista ha empleado, en las dos etapas de contrarreloj, los siguientes tiempos.**

- **1.ª etapa: 2 horas, 41 minutos y 44 segundos.**
- **2.ª etapa: 1 hora, 20 minutos y 18 segundos.**

¿Cuánto tiempo ha empleado en total?

Para **restar medidas de tiempos o ángulos** se colocan el minuendo y el sustraendo, haciendo coincidir horas con horas o grados con grados, minutos con minutos y segundos con segundos.

Al operar hay que tener en cuenta estos pasos.

1.º Si algún dato del minuendo es menor que el del sustraendo transformamos una unidad de orden superior en la unidad correspondiente *(1 grado o 1 hora es 60 minutos; 1 minuto es 60 segundos).*

2.º Procedemos a la resta.

EJEMPLO

Efectúa la resta: 3° 23' 10" − 1° 25' 34".

$$\begin{array}{r} 3°\ 23'\ 10'' \\ -\ 1°\ 25'\ 34'' \\ \hline \end{array}$$

Como 10 es menor que 34, pasamos 1 minuto a la columna de los segundos 23' = 22' + 1'.

1' = 60", que se lo sumamos a 10".

$$\begin{array}{r} 3°\ \mathbf{22'\ 70''} \\ -\ 1°\ 25'\ 34'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3°\ \mathbf{22'\ 70''} \\ -\ 1°\ 25'\ 34'' \\ \hline \end{array}$$

Como 22 es menor que 25, pasamos 1 grado a la columna de los minutos.

3° = 2° + 1°

1° = 60', que se lo sumamos a 22'.

$$\begin{array}{r} \mathbf{2°\ 82'}\ 70'' \\ -\ 1°\ 25'\ 34'' \\ \hline 1°\ 57'\ 36'' \end{array}$$

Resta final

3 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) 4° 11' 17" − 1° 16' 32"

c) 11° 44' 11" − 5° 16' 39"

b) 50' 43" − 3' 50"

d) 12° 7' 55" − 7° 49' 54"

4 **Ángel ha estado conectado a Internet 1 h 10 min por la mañana y 2 h 25 min 40 s por la tarde.**

a) ¿Cuánto tiempo ha estado conectado en total?

b) ¿Y cuánto tiempo ha estado conectado más por la tarde que por la mañana?

REALIZAR MULTIPLICACIONES Y DIVISIONES POR UN NÚMERO

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para **multiplicar medidas de tiempos o de ángulos por un número natural** se procede así:

1.° Multiplicamos cada unidad por el número natural.

2.° Se efectúan las conversiones y agrupamientos necesarios *(1 grado o 1 hora es 60 minutos; 1 minuto es 60 segundos).*

EJEMPLO

Efectúa el producto: (23° 21' 19") · 4.

$$\begin{array}{r}23^\circ\\ \times\ 4\\ \hline 92^\circ\end{array}\qquad\begin{array}{r}21'\\ \times\ 4\\ \hline 84'\end{array}\qquad\begin{array}{r}19''\\ \times\ 4\\ \hline 76''\end{array}\longrightarrow 76'' = 60'' + 16'' = \mathbf{1'} + 16''$$

$$\mathbf{16''}$$

$$\begin{array}{r}84'\\ \mathbf{1'}\\ \hline 85'\end{array}\longrightarrow 85' = 60' + 25' = \mathbf{1^\circ} + 25'$$

$$\mathbf{25'}$$

$$\begin{array}{r}92^\circ\\ \mathbf{1^\circ}\\ \hline \mathbf{93^\circ}\end{array}$$

(23° 21' 19") · 4 = 93° 25' 16"

1 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) (14° 21' 7") · 5

c) (9° 30' 10") · 5

b) (50' 43") · 6

d) (2° 7' 55") · 12

2 **Elena utiliza un bono telefónico para hablar con su hijo Andrés, que está en Inglaterra. Hablan a diario 25 minutos y 30 segundos. ¿Cuánto tiempo habla por teléfono Elena de lunes a viernes?**

3 **Un ordenador ha funcionado durante tres días consecutivos un tiempo diario de 4 h 35 min 20 s. ¿Cuánto tiempo ha estado en funcionamiento?**

Para **dividir medidas de tiempos o de ángulos entre un número natural** se procede así:

1.º Dividimos los grados (u horas) entre el número natural.

2.º El resto de grados (u horas) se pasan a minutos y se añaden a los que hay. Se dividen los minutos entre el número natural.

3.º El resto de minutos se pasan a segundos y se añaden a los que hay. Se dividen los segundos entre el número natural.

- Procura dejar espacio suficiente para que los cocientes de las diferentes unidades se vean claramente.
- Recuerda: *Dividendo* = *Divisor* · *Cociente* + *Resto*.

EJEMPLO

Efectúa la división: (85° 35' 10") : 3.

85°	35'	10"	3
25			**28° 31' 43"**
1° · 60 =	60'		
	95'		
	05		
	2' · 60 =	120"	
		130"	
		10	
		1"	

Cociente: 28° 31' 43"

Resto: 1"

4 **Un atleta ha tardado un total de 50 min 46 s en dar 9 vueltas a una pista de atletismo. Si ha mantenido el mismo ritmo en cada vuelta, ¿cuánto tiempo ha empleado en cada una?**

5 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) (44° 21’ 37”) : 5

c) (39° 3’ 40”) : 3

b) (50’ 43”) : 6

d) (42° 17’ 55”) : 12

6 **Cristina ha utilizado el ordenador durante 8 h 37 min, de lunes a viernes.**
¿Cuánto tiempo ha estado funcionando a diario el ordenador?

7 **Antonio realiza durante 10 días un paseo en el que tarda 2 h 15 min 18 s.**
Si cada día hace tres paradas para dividir el trayecto en tres tiempos iguales, calcula.

a) El tiempo total que pasea en los 10 días.

b) El tiempo que tarda diariamente entre parada y parada.

5 Expresiones algebraicas

INTRODUCCIÓN

El lenguaje algebraico sirve para expresar situaciones relacionadas con la vida cotidiana, utilizando letras y números de forma combinada.

La realización de estas operaciones ha de hacerse al principio paso a paso, pero después se agilizarán y simplificarán las distintas fases en la resolución de ecuaciones.

El estudio de las expresiones algebraicas fomentará en los alumnos la agilidad en las operaciones aritméticas con números naturales y enteros, así como el empleo de técnicas de resolución por tanteo, ensayo-error y específicas, como la transposición y reducción de términos.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- El *lenguaje algebraico* utiliza letras en combinación con números y signos. La parte de las Matemáticas que estudia la relación entre números, letras y signos se llama Álgebra.
- Una *expresión algebraica* es el conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones matemáticas.
- Podemos hallar el *valor numérico de una expresión algebraica*, sustituyendo las letras por números y realizando las operaciones.
- Los *monomios* son las expresiones algebraicas más sencillas. Están formados por números (coeficientes) y letras (parte literal).
- Un *polinomio* es una expresión algebraica formada por dos o más monomios. Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir monomios.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Expresar de forma algebraica ciertas situaciones.	• Lenguaje numérico y algebraico. • Expresión algebraica. • Valor numérico.	• Traducción al lenguaje algebraico de ciertas situaciones. • Obtención del valor numérico de una expresión.
2. Distinguir y operar con monomios.	• Monomios semejantes. • Operaciones con monomios: suma, resta, multiplicación y división.	• Resolución de operaciones de suma y resta de monomios semejantes. • Multiplicación y división de dos monomios.
3. Identificar y operar con polinomios.	• Operaciones con polinomios: suma, resta y multiplicación. • Sacar factor común.	• Resolución de operaciones de suma, resta y multiplicación de polinomios. • Extracción de factor común de un polinomio.
4. Aplicar las igualdades notables.	• Cuadrado de una suma. • Cuadrado de una diferencia. • Suma por diferencia.	• Aplicación de las igualdades notables para simplificar la expresión de algunos polinomios.

OBJETIVO 1

EXPRESAR DE FORMA ALGEBRAICA CIERTAS SITUACIONES

NOMBRE: ____________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

LENGUAJE NUMÉRICO Y LENGUAJE ALGEBRAICO

- El lenguaje en el que intervienen números y signos de operaciones se denomina **lenguaje numérico**.
- El lenguaje que combina letras con números y signos de operaciones aritméticas se llama **lenguaje algebraico**.

EJEMPLO

Lenguaje usual	Lenguaje numérico
Catorce dividido entre siete	$14 : 7$
Dos elevado al cuadrado	2^2
La tercera parte de 18	$\frac{18}{3}$

Lenguaje usual	Lenguaje algebraico
La suma de dos números	$a + b$
Un número menos 3 unidades	$y - 3$
El cuadrado de un número	b^2
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$

1 **Expresa con lenguaje numérico o lenguaje usual.**

LENGUAJE USUAL	LENGUAJE NUMÉRICO
La suma de once más nueve es veinte	
Cien dividido entre veinte	
La cuarta parte de veinte es cinco	
Dos elevado al cubo es ocho	
	$32 : 8$
	$3 \cdot 4$

2 **Une cada enunciado con su equivalente en lenguaje algebraico.**

a) La mitad de un número. $(m + n)^2$

b) El triple de un número menos cinco unidades. $n - 1$

c) El número anterior a un número entero. $2 \cdot (a + b + c)$

d) El número posterior a un número entero. $x + 1$

e) El cuadrado de la suma de dos números. $\frac{m}{2}$

f) El doble de la suma de tres números. $3 \cdot b - 5$

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos con los signos de las operaciones matemáticas.

EJEMPLO

Expresión escrita	Expresión algebraica
La suma de dos números menos dos	$x + y - 2$
El triple de un número más cinco	$3 \cdot x + 5$
El cuadrado de un número más una unidad	$x^2 + 1$

3 **Escribe estos enunciados como expresión algebraica.**

a) El doble de un número *b*.

b) El doble de la suma de dos números *m* y *n*.

c) El cuadrado de un número *x* más 4 unidades.

d) El producto de tres números *a*, *b* y *c*.

e) El doble de un número *y* más 3 unidades.

4 **Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica.**

a) El doble de un número más dos unidades.	$x - 5$
b) Un número disminuido en cinco unidades.	$\dfrac{x}{3}$
c) La tercera parte de un número.	$2 \cdot x + 2$
d) El cubo de un número.	$x + 10$
e) El doble de un número.	$2x$
f) Un número aumentado en diez unidades.	x^3
g) La diferencia de dos números.	$x + 1$
h) El número siguiente a un número entero.	$x - y$

5 **Si *x* es la edad de Juan, expresa en lenguaje algebraico.**

LENGUAJE USUAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Los años que tenía el año pasado	
Los años que tendrá dentro de un año	
La edad que tenía hace 5 años	
La edad que tendrá dentro de 5 años	
Los años que faltan para que cumpla 70 años	

ADAPTACIÓN CURRICULAR

6 **Inventa un enunciado para estas expresiones algebraicas.**

a) $n + 1 \longrightarrow$

b) $a + b \longrightarrow$

c) $\frac{b}{2} \longrightarrow$

d) $2 \cdot (m - n) \rightarrow$

e) $x^3 - 1 \longrightarrow$

f) $2 \cdot x + 1 \longrightarrow$

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.

EJEMPLO

Halla el valor numérico de la expresión algebraica $3x + 2$ para $x = 1$.

Sustituimos x por 1 en la expresión algebraica y realizamos las operaciones:

$$x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

El valor numérico de $3x + 2$, para $x = 1$, es 5.

7 **Halla el valor numérico de la expresión algebraica $2x + 1$ para estos valores:**

VALOR	SUSTITUCIÓN	OPERACIÓN	VALOR NUMÉRICO
$x = 0$	$2 \cdot (0) + 1$	$2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1$	1
$x = 2$			
$x = -1$			
$x = -2$			

8 **Calcula el valor numérico de estas expresiones para los valores que se indican.**

VALORES	$x + y$	$2x - 3y$	$(x + y)^2$
$x = 1$ $y = 0$	$1 + 0 = 1$	$2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 =$	$(1 + 0)^2 = (1)^2 =$
$x = -1$ $y = 2$			
$x = 1$ $y = -2$			
$x = -2$ $y = 3$			
$x = -1$ $y = -1$			

MONOMIOS

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por productos de números y letras. A los números se les denomina **coeficientes**, y a las letras con sus exponentes, **parte literal**.

EJEMPLO

MONOMIO	$3x$	$-5ab$	$-5x^3$	$\frac{3}{5}x$
COEFICIENTE	3	-5	-5	$\frac{3}{5}$
PARTE LITERAL	x	ab	x^3	x

1 **Completa las tablas.**

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL
x	1	x
$-3xy$	-3	
$-5xy^2$		
$\frac{1}{3}x^2y$		

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL
$\frac{2}{3}a^2b$		
$-2xyz$		
$-3b^2c$		
$-\frac{5}{7}xyz^2$		

GRADO DE UN MONOMIO

El **grado de un monomio** es el número que resulta de sumar todos los exponentes de su parte literal.

EJEMPLO

MONOMIO	GRADO	EXPLICACIÓN
$-3x$	1	El exponente de x es 1 (x^1)
$4a^2y$	3	La suma de los exponentes de a^2y^1 es $2+1=3$
$-5x^2y^3$	5	La suma de los exponentes de x^2y^3 es $2+3=5$

2 **Calcula el grado de los siguientes monomios.**

a) $-5x^2 \longrightarrow$ Grado =

b) $7x^2y \longrightarrow$ Grado =

c) $\frac{2}{3}a^5b \rightarrow$ Grado =

d) $zx^2 \longrightarrow$ Grado =

e) $-yx \rightarrow$ Grado =

f) $-x \longrightarrow$ Grado =

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Completa la siguiente tabla.**

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$-3x$	-3	x	1
$-2a^3b$			
$-2ab$			
xyz			
$7ab^2c^3$			
$6y^2z$			

MONOMIOS SEMEJANTES

Dos o más **monomios** son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal.

EJEMPLO

$5x$; $2x$ son monomios semejantes, porque tienen la misma parte literal (x).

$3xy^2$; $-xy^2$ son monomios semejantes, porque tienen la misma parte literal (xy^2).

x^2y^3; xy^2 no son monomios semejantes.

4 **Escribe dos monomios semejantes para cada monomio.**

MONOMIO	MONOMIOS SEMEJANTES
$-5x$	
$-ab$	
$-2yx^3$	
$-3y^2z^3$	
$\frac{2}{3}a^2b$	
$5xy$	

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

- La **suma y resta de monomios** solo se puede realizar cuando los monomios son semejantes.
- Para sumar o restar monomios semejantes se suman o restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

EJEMPLO

$\mathbf{2x} + \mathbf{x} = (2 + 1)x = 3x$

$\mathbf{2x} + \mathbf{y} \rightarrow$ La suma se deja indicada, porque no son monomios semejantes.

5 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $a + a + a + a =$

b) $2x^2 + x^2 + x^2 =$

c) $5mn - mn - 4mn =$

d) $5x - 3x - x =$

e) $-5x^3 - 3x^3 =$

f) $p - 2p + 5p =$

6 **Completa los huecos con monomios semejantes y calcula.**

a) $2x + \boxed{} + \boxed{} =$

b) $\boxed{} + 5p + \boxed{} =$

c) $2x^3 + \boxed{} =$

d) $\boxed{} + 2xy + \boxed{} =$

7 **Escribe un monomio semejante al que se indica y calcula.**

a) $7x - \boxed{} =$

b) $\boxed{} - x^2 =$

c) $5pq - \boxed{} =$

d) $\boxed{} - 4x^2y =$

8 **Reduce las siguientes expresiones algebraicas.**

a) $6x^2 + 4x - 2x^2 - x$

Sumamos y restamos los monomios semejantes y calculamos el resultado:

$$\underbrace{6x^2 - 2x^2}_{4x^2} + \underbrace{4x - x}_{3x}$$

b) $5x^2 - 2x + 3x^2 - x =$

c) $ab - ab + 7ab + 4ab - 2ab =$

d) $3ab^3 - 2ab + 5ab^3 - ab + 4ab =$

e) $-10xy - 5xy + 2xy + 4x - 8y + 2y + 2x =$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

El **producto de dos o más monomios** es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuya parte literal es el producto de las partes literales.

EJEMPLO

$\mathbf{3x \cdot 2x} = (3 \cdot 2) \cdot x \cdot x = 6x^2$ $\quad$ $\mathbf{4x \cdot (-2x^2)} = [4 \cdot (-2)] \cdot x \cdot x^2 = -8x^3$

9 **Realiza estas multiplicaciones.**

a) $4a \cdot 3a =$

b) $3x^2 \cdot 3x^2 =$

c) $-2x \cdot (-5x) =$

d) $3x^2 \cdot (-3x^2) =$

e) $m \cdot m^2 =$

f) $\frac{2}{3}x \cdot \frac{3}{5}x^2 =$

10 **Calcula y reduce.**

a) $4x(2x - 5) = 4x \cdot 2x - 4x \cdot 5 = 4 \cdot 2 \cdot x \cdot x - 4 \cdot 5 \cdot x = 8x^2 - 20x$

b) $3(2x + 3x^2) =$

c) $2a(4a^3 - 3a^2) =$

d) $(3 - ab + ab^2)2a =$

e) $2(x^2 + 3x) - 2x =$

f) $-3x(x^3 - 2x + 4) - 12x =$

g) $-x^3(-5x + 4 - 3x^2 - 10x) =$

h) $-\frac{1}{3}x(-x^4 + 3x - 2x) + x^2 =$

DIVISIÓN DE MONOMIOS

El **cociente de dos monomios** es otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es el cociente de las partes literales.

EJEMPLO

$\mathbf{6x : 2x} = \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} \cdot \frac{x}{x} = 3 \cdot 1 = 3$

$\mathbf{10x^3 : (-5x)} = \frac{10}{-5} \cdot \frac{x^3}{x} = -2x^2$

11 **Resuelve estas divisiones de monomios.**

a) $8x^3 : 2x =$

b) $(-12x^5) : (-12x^4) =$

c) $20m^4 : 15m^3 =$

d) $a^4 : a^2 =$

e) $(-14y^4) : (-2y^2) =$

f) $(-20z^5) : 4z^4 =$

12 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $(7x^5 : 2x) + x =$

b) $(6x^7 : x^3) - (5x : x) =$

c) $(8a^2b : 4ab) + b^2 =$

d) $3x(x + 1) - (4x^2 : x) =$

e) $(12a^3b^2 : 3a^2b) - b =$

f) $3(4xy^2 : 2xy) - 2y =$

g) $2x[(-2y^2x^3) : (-x^2y)] + x(x - 1) =$

IDENTIFICAR Y OPERAR CON POLINOMIOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

POLINOMIOS

Un **polinomio** es la suma o resta de varios monomios.

– Cada uno de los sumandos se llama **término** del polinomio.

– Los términos que no tienen parte literal se denominan **términos independientes**.

– El **grado de un polinomio** es el del monomio de mayor grado.

EJEMPLO

POLINOMIO	TÉRMINOS	TÉRMINO INDEPENDIENTE	GRADO DEL POLINOMIO
$2x^3 - 3x - 1$	$2x^3$; $-3x$; -1	-1	3, que es el grado de $2x^3$
$-2xy + 9$	$-2xy$; 9	9	2, que es el grado de $-2xy$
$-5x$	$-5x$	No tiene	1, que es el grado de $-5x$

1 **Completa esta tabla.**

POLINOMIO	TÉRMINOS	TÉRMINO INDEPENDIENTE	GRADO DEL POLINOMIO
$-2x^3 + 3x - 5$			
$5ab - 5ax^2b$			
$x^3 - 2x^2 - x - 3$			
$6x - 7$			
$5xy - 2y$			
$\frac{2}{3}a^2b + 1$			
$3xy + 5xy^2$			

2 **Escribe un polinomio de grado 3 que tenga un término, otro con dos términos y un tercero con tres términos.**

3 **Indica el grado de los siguientes polinomios.**

a) $-x + 3x^2 \rightarrow$ Grado =

b) $x^2y - 3x \longrightarrow$ Grado =

c) $2x^5 - x \longrightarrow$ Grado =

d) $-5x^4 - x^3 - 8 \rightarrow$ Grado =

ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 **Halla el valor numérico del polinomio $x^2 - 2x + 1$ para los valores que se indican.**

VALOR	VALOR NUMÉRICO DEL POLINOMIO
$x = 0$	$0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$
$x = 1$	
$x = -2$	

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Para **sumar** o **restar polinomios** se suman o restan los monomios semejantes.

EJEMPLO

$A(x) = 2x^2 + 5$

$B(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 3$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \qquad + 5 \\ + \; x^3 - 5x^2 - 2x + 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 - 2x + 8 \end{array}$$

$\mathbf{A(x) + B(x)} = (2x^2 + 5) + (x^3 - 5x^2 - 2x + 3) =$

$= x^3 - 3x^2 - 2x + 8$

$\mathbf{A(x) - B(x)} = (2x^2 + 5) - (x^3 - 5x^2 - 2x + 3) =$

$= 2x^2 + 5 - x^3 + 5x^2 + 2x - 3 =$

$= -x^3 + 7x^2 + 2x + 2$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \qquad + 5 \\ -x^3 + 5x^2 + 2x - 3 \\ \hline -x^3 + 7x^2 + 2x + 2 \end{array}$$

5 **Dados los polinomios $A(x) = 6x^2 - 8x + 1$ y $B(x) = -9x^2 - 2x + 7$, calcula.**

a) $A(x) + B(x)$ b) $A(x) - B(x)$ c) $B(x) - A(x)$

6 **Dados los polinomios $A(x) = x^3 - 3x + 2$, $B(x) = -2x^2 + 7x$ y $C(x) = -x^3 - 2$, calcula.**

a) $A(x) + B(x) + C(x)$ b) $A(x) + B(x) - C(x)$ c) $A(x) - B(x) - C(x)$

7 **Escribe los siguientes polinomios de forma reducida.**

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x^3 + 4x^2 - 7x + 2x^3$$
$$Q(x) = -4x^2 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 2x^2 + 5x^3 - 1$$
$$R(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x + 2x^2 - 3x^3 + 8x - 2$$

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x^3 + 4x^2 - 7x + 2x^3 = 3x^3 - 5x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 7x = 6x^2 - 7x$$

8 **Con los polinomios reducidos del ejercicio anterior, calcula.**

a) $P(x) + Q(x)$ b) $Q(x) + R(x)$ c) $Q(x) - R(x)$ d) $P(x) - Q(x)$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

Para calcular el **producto de dos polinomios** se multiplica cada monomio del primer polinomio por cada monomio del segundo. A continuación, se reducen los monomios semejantes.

EJEMPLO

$A(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

$B(x) = 2x^2 + 3x$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 - 2x + 1 \\ \times \qquad\qquad 2x^2 + 3x \\ \hline 3x^4 - 15x^3 - 6x^2 + 3x \\ 2x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 2x^2 \\ \hline \end{array}$$

$\boldsymbol{A(x) \cdot B(x)} \rightarrow 2x^5 - 7x^4 - 19x^3 - 4x^2 + 3x$

9 **Dados los polinomios $A(x) = -4x^3 + 6x^2 - 8x + 1$ y $B(x) = 2x^2 - 7$, calcula.**

a) $A(x) \cdot B(x)$ b) $B(x) \cdot 3x$ c) $A(x) \cdot x$ d) $B(x) \cdot (-3x)$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

SACAR FACTOR COMÚN

Una aplicación de la propiedad distributiva es **sacar factor común**. Esta operación consiste en extraer como factor común el monomio que se repite en todos los términos.

EJEMPLO

EXPRESIÓN	FACTOR COMÚN	SACAR FACTOR COMÚN
$5x + 5y$	5	$5(x + y)$
$7x^2 - 3x$	x	$x(7x - 3)$
$5x^2 - 5x$	$5x$	$5x(x - 1)$
$3x^2 - 12x + 15x^3$	$3x$	$3x(x - 4 + 5x^2)$

10 **Extrae factor común en las siguientes expresiones.**

a) $3b + 4b$

b) $3a + 6b + 12$

c) $15x^4 - 5x^2 + 10x$

d) $6x^2y + 4xy^2$

e) $12x^2 - 3x^2 + 9x^3$

f) $10xy^2 - 20xy + 10x^2y$

11 **Simplifica las fracciones, sacando factor común en el numerador y en el denominador.**

a) $\dfrac{10x^3 + 10x}{5x} = \dfrac{10x(x^2 + 1)}{5x} = \dfrac{2 \cdot \cancel{5x}(x^2 + 1)}{\cancel{5x}} = \dfrac{2(x^2 + 1)}{1} = 2(x^2 + 1)$

b) $\dfrac{6x^4y^2}{-3x^3y^2} =$

c) $\dfrac{a^3b^3}{a^3b} =$

d) $\dfrac{12m^3}{12m} =$

e) $\dfrac{4 - 6a}{6a^2 - 9a^3} =$

f) $\dfrac{x^2y^2 - x^3y^2}{x^2y^2} =$

APLICAR LAS IGUALDADES NOTABLES

NOMBRE: ______________________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

IGUALDADES NOTABLES

Las **igualdades notables** son ciertas igualdades cuya aplicación resulta muy útil para abreviar cálculos con expresiones algebraicas.

Las principales igualdades notables son:

Cuadrado de una suma: $(a + b)^2$

Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2$

Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b)$

CUADRADO DE UNA SUMA

El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primer sumando más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\begin{array}{r}
a + b \\
\times \quad a + b \\
\hline
ba + b^2 \\
a^2 + \quad ab \qquad \\
\hline
\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}
\end{array}$$

1 **Calcula.**

a) $(x + 5)^2 =$

c) $(2 + x)^2 =$

b) $(a + 2b)^2 =$

d) $(xy + 1)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

El **cuadrado de una diferencia** es igual al cuadrado del primer sumando menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\begin{array}{r}
a - b \\
\times \quad a - b \\
\hline
- ba + b^2 \\
a^2 \quad - ab + b^2 \\
\hline
\mathbf{a^2 - 2ab + b^2}
\end{array}$$

2 **Calcula.**

a) $(x - 1)^2 =$

c) $(2a - 3b)^2 =$

b) $(a - 6b)^2 =$

d) $(5 - 3x)^2 =$

SUMA POR DIFERENCIA

El producto de una **suma por diferencia** es igual a la diferencia de los cuadrados.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times \quad a - b \\ \hline - ba - b^2 \\ a^2 + ab \quad\;\; \\ \hline \mathbf{a^2 + 0 - b^2} \end{array}$$

3 **Calcula.**

a) $(x + 5) \cdot (x - 5) =$

b) $(2a + b) \cdot (2a - b) =$

c) $(7 + x) \cdot (7 - x) =$

d) $(5a + 1) \cdot (5a - 1) =$

4 **Expresa en forma de igualdad notable.**

a) $x^2 + 2x + 1 =$

b) $x^2 + 10x + 25 =$

c) $x^2 - 16 =$

d) $4x^2 - 4x + 1 =$

e) $9a^2 - 30ab + 25b^2 =$

f) $4x^2 - 36 =$

5 **Simplifica las fracciones, utilizando las igualdades notables.**

a) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} =$

b) $\dfrac{x^2 - 10x + 5^2}{x^2 - 25} =$

6 Ecuaciones de 1.er y 2.o grado

INTRODUCCIÓN

La unidad comienza diferenciando entre ecuaciones e identidades, para pasar luego a la exposición de los conceptos asociados al de ecuación: miembros, términos, grado, coeficientes, solución…, que son fundamentales para comprender el resto de la unidad.

Para resolver ecuaciones de primer grado, los alumnos aprenderán a transponer términos. Es importante que comprendan que las reglas de la suma y el producto son transformaciones que permiten pasar de una ecuación inicial, compleja en su expresión, a otra más sencilla pero con la misma solución, es decir, equivalente a ella. A continuación se trabajará con ecuaciones en las que hay paréntesis y denominadores.

Aunque no es el objetivo de este curso, los alumnos deben aprender a identificar una ecuación de segundo grado. Por ello conviene mostrar la utilidad de la fórmula general para hallar las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado, utilizando solo sus coeficientes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *ecuación* es una igualdad algebraica que solo es cierta para algunos valores.
- La *incógnita de una ecuación* es la letra de valor desconocido.
- El *grado de una ecuación* es el mayor exponente de la incógnita.
- La *solución o soluciones de una ecuación* son los valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad.
- Para *resolver ecuaciones* se aplican las reglas de la suma y el producto.
- *Regla de la suma*: si sumamos o restamos a los dos miembros de una ecuación un mismo número o expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente.
- *Regla del producto*: si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.
- Ecuación de primer grado: $ax = b$.
- Ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Distinguir e identificar ecuaciones e identidades.	• Elementos de una ecuación. Solución. • Ecuaciones equivalentes.	• Comprobación de si un valor es solución o no de una ecuación. • Identificación y obtención de ecuaciones equivalentes.
2. Resolver ecuaciones de primer grado.	• Ecuaciones con denominadores. • Método general de resolución de ecuaciones.	• Utilización de técnicas para resolver ecuaciones con denominadores.
3. Resolver ecuaciones de segundo grado.	• Ecuaciones de segundo grado completas. • Ecuaciones de segundo grado incompletas.	• Aplicación de la fórmula general para resolver ecuaciones completas de segundo grado. • Resolución de ecuaciones incompletas de segundo grado.
4. Resolver problemas mediante ecuaciones.	• Traducción al lenguaje algebraico del enunciado de un problema. • Comprobación de la solución de un problema.	• Seguimiento de los pasos necesarios para resolver problemas mediante ecuaciones de primer o segundo grado.

6 OBJETIVO 1
DISTINGUIR E IDENTIFICAR ECUACIONES E IDENTIDADES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

IDENTIDADES Y ECUACIONES

- Una **igualdad algebraica** está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual (=).
- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor de las letras.
- Una **ecuación** es una igualdad algebraica que no se cumple para todos los valores de las letras.
  Resolver una ecuación es encontrar el valor o los valores de las letras para que se cumpla la igualdad.

EJEMPLO

$\boldsymbol{x + x = 2x}$ es una identidad.

Se cumple la igualdad para cualquier valor numérico que tome x:

Para $x = 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \cdot 1 \rightarrow 2 = 2$

Para $x = -2 \rightarrow (-2) + (-2) = 2(-2) \rightarrow -4 = -4$

$\boldsymbol{x + 4 = 10}$ es una ecuación. Solo se cumple cuando $x = 6 \rightarrow 6 + 4 = 10$.

1 **Indica si las igualdades son identidades o ecuaciones.**

a) $x + 8 = 2x - 15$

b) $2(x + 2y) = 2x + 4y$

c) $x + x + x = 3x$

d) $x^2 \cdot x^3 = x^5$

e) $2x + 1 = 11$

f) $\frac{x}{2} = 12$

2 **Indica el valor de *x* para que se cumpla la igualdad.**

ECUACIÓN	PREGUNTA	VALOR DE *x*
$15 - x = 12$	¿Qué número restado a 15 da 12?	$x =$
$10 + x = 14$		
$11 - x = 10$		
$2 + x = 9$		
$16 - x = 4$		

3 **Calcula mentalmente el valor de *x* para que se cumpla la igualdad.**

a) $x - 1 = 2$

b) $x + 7 = 15$

c) $x - 3 = 6$

d) $-x + 10 = 5$

e) $x + 4 = 12$

f) $-x - 6 = -10$

ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos o más **ecuaciones** son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

$x + 4 = 10$ y $2x = 12$ son ecuaciones equivalentes, ya que ambas tienen como solución $x = 6$.

$$6 + 4 = 10 \qquad 2 \cdot 6 = 12$$

4 **Para cada una de estas ecuaciones, escribe una ecuación equivalente y halla su solución.**

ECUACIÓN	ECUACIÓN EQUIVALENTE	SOLUCIÓN
$7 + x = 13$		
$x + 2 = 9$		
$2x = 14$		
$x - 4 = 4$		
$11 = 9 + x$		

5 **La ecuación $3x + 4 = 10$ tiene como solución $x = 2$. Averigua cuáles de las ecuaciones son equivalentes a la ecuación $3x + 4 = 10$.**

a) $3x + 10 = 20$

b) $\frac{3}{2}x - 8 = -5$

c) $4x + 12 - x = 21$

d) $\frac{4}{9}x + 12x - 8 = 18$

e) $\frac{2}{7}x + 2x - 5 = 6x$

f) $2x + 8 - \frac{1}{2}x = x + 9$

g) $12x - 3x + 10 = 5x + 18$

h) $\frac{1}{2}x + 3x = \frac{3}{2}x + 4$

6 **Tantea y halla la solución de las siguientes ecuaciones.**

a) $x - 2 = 2$

b) $4 + x = -2$

c) $x - 1 = -5$

d) $\frac{x}{2} = 4$

e) $x - 4 = 1$

f) $-1 + x = -3$

g) $-2 - x = -4$

h) $\frac{x}{18} = -6$

i) $2x - 1 = 3$

j) $3x = -15$

k) $-2x - 4 = 10$

l) $\frac{2x}{5} = 2$

RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

- Si a los dos miembros de una ecuación se les **suma o resta un mismo número** o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
- Si a los dos miembros de una ecuación se les **multiplica o divide por un mismo número distinto de cero**, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación $x - 4 = 10$.

Sumamos 4 en ambos miembros $\longrightarrow x - 4 + 4 = 10 + 4$

$x = 14$

Resuelve la ecuación $x + 2x = 4 + 2x + 5$.

Restamos $2x$ en ambos miembros $\longrightarrow x + 2x - 2x = 4 + 2x - 2x + 5$

$x = 4 + 5$

$x = 9$

Resuelve la ecuación $3x = 12$.

Dividimos ambos miembros entre 3 $\longrightarrow \dfrac{3x}{3} = \dfrac{12}{3} \rightarrow x = 4$

Resuelve la ecuación $\dfrac{5x}{4} = 10$.

Multiplicamos por 4 ambos miembros $\longrightarrow \dfrac{5x}{4} \cdot 4 = 10 \cdot 4 \rightarrow 5x = 40$

Dividimos ambos miembros entre 5 $\longrightarrow \dfrac{5x}{5} = \dfrac{40}{5} \rightarrow x = 8$

1 **Resuelve las siguientes ecuaciones, aplicando la transposición de términos.**

a) $3x = 15$

d) $2x + 6 = 20 + 6 + x$

b) $x + 6 = 14$

e) $2x + 4 = 16$

c) $-10 = -x + 3$

f) $-4x - 4 = -20 - x$

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $2x - 5 = 3$

d) $-x - 4 = 10$

b) $x = -15 - 4x$

e) $2x + 7 = x + 14$

c) $x - 10 = 2x - 4$

f) $3x + 8 = 12 - x$

MÉTODO GENERAL DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resuelve la ecuación $2(x - 4) - (6 + x) = 3x - 4$.

Para resolver una ecuación es conveniente seguir estos pasos.

1.º Eliminar paréntesis. $2x - 8 - 6 - x = 3x - 4$

2.º Reducir términos semejantes. $x - 14 = 3x - 4$

3.º Transponer términos.

Restamos x en ambos miembros. $x - x - 14 = 3x - x - 4$

$-14 = 2x - 4$

Sumamos 4 en ambos miembros. $-14 + 4 = 2x - 4 + 4$

$-10 = 2x$

4.º Despejar la incógnita.

Dividimos ambos miembros entre 2. $\dfrac{-10}{2} = \dfrac{2x}{2} \rightarrow -5 = x$

3 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $4 - x = 2x + 3x - 5x$

d) $3x + 8 - 5(x + 1) = 2(x + 6) - 7x$

b) $-10 - x + 3x = 2x + 4x + 2$

e) $5(x - 1) - 6x = 3x - 9$

c) $2x - 9 = 3x - 17$

f) $3(3x + 1) - (x - 1) = 6(x + 10)$

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $2(x - 5) = 3(x + 1) - 3$

d) $3(x + 2) + 4(2x + 1) = 11x - 2(x + 6)$

b) $4(x - 2) + 1 = 5(x + 1) - 3x$

e) $5(x - 4) + 30 = 4(x + 6)$

c) $3(x - 3) = 5(x - 1) - 6x$

f) $5(2 - x) + 3(x + 6) = 10 - 4(6 + 2x)$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON DENOMINADORES

Resuelve la ecuación $\dfrac{2x - 1}{3} = \dfrac{x - 3}{2} + \dfrac{3x - 7}{4}$**.**

Para resolver una ecuación con denominadores es conveniente seguir estos pasos.

1.º Eliminar denominadores.

$$\text{m.c.m.}\ (3, 2, 4) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$12 \cdot \frac{2x - 1}{3} = 12 \cdot \frac{x - 3}{2} + 12 \cdot \frac{3x - 7}{4}$$

$$4(2x - 1) = 6(x - 3) + 3(3x - 7)$$

2.º Eliminar paréntesis.

$$8x - 4 = 6x - 18 + 9x - 21$$

3.º Reducir términos semejantes.

$$8x - 4 = 15x - 39$$

4.º Transponer términos.

Restamos $8x$ en ambos miembros.

$$8x - 4 - 8x = 15x - 39 - 8x$$
$$-4 = 7x - 39$$

Sumamos 39 en ambos miembros.

$$-4 + 39 = 7x - 39 + 39$$
$$35 = 7x$$

5.º Despejar la incógnita.

Dividimos ambos miembros entre 7.

$$\frac{35}{7} = \frac{7x}{7} \to x = 5$$

5 **Halla la solución de estas ecuaciones.**

a) $\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{12-2x}{5} = \dfrac{x-2}{5}$

f) $\dfrac{x-2}{2} + \dfrac{x-3}{3} + \dfrac{x-4}{4} = 10$

b) $\dfrac{3x-7}{12} - \dfrac{2x-3}{6} = \dfrac{x-1}{8}$

g) $\dfrac{x-4}{5} + \dfrac{x+3}{6} - \dfrac{x-6}{3} = 1 + \dfrac{x-7}{2}$

c) $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{x-4}{5} = 2 + \dfrac{3x-1}{15}$

h) $2\left(\dfrac{x}{3} + 5\right) = \dfrac{2x}{4} + 4$

d) $5 - \dfrac{x-2}{4} = 4 + \dfrac{x-3}{2}$

i) $\dfrac{x-3}{6} = 2 - \dfrac{5(x+3)}{12}$

e) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{6} = 30$

j) $\dfrac{3(x+5)}{4} + \dfrac{-7(x+3)}{10} = 4$

RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una **ecuación de segundo grado** es una igualdad algebraica del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde:

- *a, b* y *c* son los **coeficientes** de la ecuación, siendo $a \neq 0$.
- $ax^2 \rightarrow$ **término cuadrático** $bx \rightarrow$ **término lineal** $c \rightarrow$ **término independiente**
- *x* es la **incógnita**.

1 **Escribe la expresión general de estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $(x - 1)(x + 4) = 1 \rightarrow x^2 + 4x - x - 4 = 1 \rightarrow x^2 + 3x - 4 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 5 = 0$

b) $2x(3x + 5) = -1 + 4x$

c) $x - 5x^2 + 8 = -3x^2 - x - 3$

2 **Identifica los coeficientes de las ecuaciones de segundo grado del ejercicio anterior.**

a) $x^2 + 3x - 5 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 3,\ c = -5$

c)

b)

d)

FÓRMULA GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado puede tener **dos, una o ninguna solución**.

Para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado se aplica la siguiente fórmula.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 5x + 6 = 0$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 + 1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-5 - 1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores -2 y -3 en la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, se comprueba que la cumplen:

$$(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0 \rightarrow 4 - 10 + 6 = 0 \rightarrow 10 - 10 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$(-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6 = 0 \rightarrow 9 - 15 + 6 = 0 \rightarrow 15 - 15 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

3 **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $7x^2 + 21x = 28$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

e) $3x^2 + 6 = -9x$

c) $2x^2 - 5x - 7 = 0$

f) $(2x - 4)(x - 1) = 2$

4 **Resuelve las ecuaciones y comprueba que las soluciones verifican la ecuación.**

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$

b) $3x^2 - 6x - 9 = 0$

c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + c = 0$

Las ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ se consideran ecuaciones de segundo grado.
Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $b = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso.

$$\mathbf{ax^2 + c = 0} \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

- Si el **radicando** es **positivo**, hay dos soluciones opuestas: $x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
- Si el **radicando** es **negativo**, no hay solución.

EJEMPLO

$$\mathbf{2x^2 - 32 = 0} \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \frac{32}{2} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\mathbf{3x^2 + 75 = 0} \rightarrow 3x^2 = -75 \rightarrow x^2 = \frac{-75}{3} \rightarrow x^2 = -25 \rightarrow x = \pm\sqrt{-25} \rightarrow \text{No tiene solución}$$

5 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $7x^2 - 28 = 0$

b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $5x^2 = 45$

d) $18x^2 - 72 = 0$

6 **Indica por qué no tienen solución estas ecuaciones.**

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $2x^2 = -18$

c) $9x^2 - 5x + 18 = -18 - 5x$

d) $3(x^2 + x) = 3x - 12$

e) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4} = 0$

f) $\frac{x^2 + 7}{3} = 2$

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + bx = 0$

Las ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ se consideran ecuaciones de segundo grado. Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $c = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso.

$$ax^2 + bx = 0 \xrightarrow{\text{Factor común } x} x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen siempre dos soluciones, siendo cero una de ellas.

EJEMPLO

$$x^2 - 12x = 0 \rightarrow x(x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 12 = 0 \rightarrow x_2 = 12 \end{cases}$$

$$2x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(2x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x_2 = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $5x^2 + 5x = 0$

b) $2x^2 - 8x = 0$

c) $6x^2 = 30x$

d) $-5x^2 + 20x = 0$

8 **Halla la solución de estas ecuaciones.**

a) $25x^2 - 100x = 0$

b) $5x - 4x^2 = 0$

c) $x - x^2 = 0$

d) $-4x^2 + 16x = 0$

e) $x(x - 3) + 8 = 4(x + 2)$

f) $\dfrac{x(x-1)}{2} = \dfrac{2x^2 + 3}{3}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema utilizando ecuaciones es conveniente seguir estos pasos.

1.º **Lectura y comprensión del enunciado.** Es necesario distinguir los datos conocidos y el dato desconocido, es decir, la incógnita.

2.º **Planteamiento de la ecuación.** Hay que expresar las condiciones del enunciado en forma de ecuación: la correspondencia entre los datos y la incógnita.

3.º **Resolución de la ecuación.** Se obtiene el valor de la incógnita resolviendo la ecuación.

4.º **Comprobación e interpretación del resultado.** Se debe comprobar si el resultado verifica el enunciado e interpretar la solución en el contexto del problema.

EJEMPLO

Ana tiene 2 € más que Berta, Berta tiene 2 € más que Eva y Eva tiene 2 € más que Luisa. Entre las cuatro amigas tienen 48 €. Calcula la cantidad de dinero que tiene cada una.

1.º **Lectura y comprensión del enunciado.**

Tomamos como dato desconocido el dinero que tiene Luisa.

2.º **Planteamiento de la ecuación.**

Dinero de Luisa $\rightarrow x$

Las restantes cantidades de dinero las escribimos en función de x:

Dinero de Eva $\longrightarrow$ 2 € más que Luisa $\rightarrow x + 2$

Dinero de Berta $\rightarrow$ 2 € más que Eva $\longrightarrow (x + 2) + 2 = x + 4$

Dinero de Ana $\longrightarrow$ 2 € más que Berta $\rightarrow (x + 4) + 2 = x + 6$

Escribimos la condición de que la suma de las cantidades es 48 €.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48$$

3.º **Resolución de la ecuación.**

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48 \rightarrow 4x + 12 = 48 \rightarrow 4x = 48 - 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow \text{Luisa tiene } 9 \text{ €.}$$

Eva tiene: $9 + 2 = 11$ €. Berta tiene: $9 + 4 = 13$ €. Ana tiene: $9 + 6 = 15$ €.

4.º **Comprobación e interpretación del resultado.**

Las cantidades que tienen las amigas: 9, 11, 13 y 15 € cumplen las condiciones del enunciado.

$$9 + 11 + 13 + 15 = 48$$

1 **La suma de tres números consecutivos es 30. Hállalos.**

2 **La suma de un número, su doble y su triple es 66. ¿Cuál es el número?**

7 Sistemas de ecuaciones

INTRODUCCIÓN

Aunque no es el objetivo de este curso, los alumnos deben ser capaces de reconocer ecuaciones con dos incógnitas y obtener algunas soluciones de ellas. La obtención de sistemas equivalentes a uno dado es fundamental, ya que permite hallar la solución del sistema dado, de forma más sencilla.

Se exponen a lo largo del tema los métodos de resolución de sistemas: método de sustitución, método de igualación y método de reducción. Se deben dejar claro los pasos que se seguirán para resolver un sistema por cada uno de los métodos mencionados, así como señalar sus similitudes y diferencias con los otros métodos. Asimismo, se explicará a los alumnos que la mayor o menor idoneidad de cada uno de ellos depende de los coeficientes de las incógnitas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas*, *x* e *y*, se expresa de la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\}$$

- *Resolver un sistema* es encontrar dos números que, al reemplazarlos en las dos ecuaciones, las verifiquen. Un *sistema* es *compatible* si tiene solución.
- Dos *sistemas* son *equivalentes* si tienen la misma solución.
- *Método de sustitución*: despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra.
- *Método de igualación*: despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones, e igualar las expresiones obtenidas.
- *Método de reducción*: buscar un sistema equivalente donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales y opuestos; restar o sumar las ecuaciones, eliminando así una incógnita, y resolver la ecuación.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Identificar sistemas de ecuaciones y sus elementos.	• Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Coeficientes y términos independientes. • Solución de un sistema.	• Identificación de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Sistemas compatibles.
2. Resolver sistemas mediante el método de sustitución.	• Método de sustitución.	• Resolución de un sistema por el método de sustitución.
3. Resolver sistemas mediante el método de igualación.	• Método de igualación.	• Resolución de un sistema por el método de igualación.
4. Resolver sistemas mediante el método de reducción.	• Método de reducción. • Sistemas equivalentes.	• Resolución de un sistema por el método de reducción. • Obtención de sistemas equivalentes.

7 OBJETIVO 1

IDENTIFICAR SISTEMAS DE ECUACIONES Y SUS ELEMENTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de las que se busca una solución común.

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \textbf{Coeficientes} \text{ de las incógnitas: } a, a', b, b' \\ \textbf{Términos independientes: } k, k' \end{array}\right.$$

EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 5} \\ \boldsymbol{x - 2y = 2} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Incógnitas: } x, y \\ \text{Coeficientes de las incógnitas: } 1, 1, 1, -2 \\ \text{Términos independientes: } 5, 2 \end{array}\right.$$

1 **Determina las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 7 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2x + y = -1 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica ambas ecuaciones.
- **Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar sus soluciones.
- **Si un sistema tiene solución**, es decir, si se pueden encontrar dos números que cumplan las dos ecuaciones, se dice que es **compatible**.

EJEMPLO

Comprueba si el siguiente sistema de ecuaciones tiene como solución $x = 4$ e $y = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 5} \\ \boldsymbol{x - 2y = 2} \end{array}\right\}$$

Veamos si la solución del enunciado verifica las dos ecuaciones del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 4,\ y = 1} \left.\begin{array}{r} 4 + 1 = 5 \\ 4 - 2 \cdot 1 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, $x = 4$ e $y = 1$ es una solución del sistema. El sistema es compatible.

2 **Determina si $x = 0$ e $y = -1$ es solución de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 2 \\ 3y = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + 4y = -4 \end{array}\right\}$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**, debemos:

a) **Despejar** la incógnita en una de las dos ecuaciones.
b) **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
c) **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
e) **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x+y=30} \\ \boldsymbol{x-y=10} \end{aligned}\right\}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita x de la segunda ecuación.

$$x = 10 + y$$

b) **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación.

$$x + y = 30 \xrightarrow{x = 10 + y} (10 + y) + y = 30$$

c) **Resolvemos** la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} (10 + y) + y &= 30 \\ 10 + y + y &= 30 \\ 10 + 2y &= 30 \\ 2y &= 30 - 10 \\ y &= \frac{20}{2} \\ \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 10}$$

d) **Sustituimos** el valor $y = 10$ en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x + 10 &= 30 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 20}$$

e) **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hay que sustituir el par de valores (20, 10) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 20,\ y = 10} \left.\begin{aligned} 20 + 10 = 30 \\ 20 - 10 = 10 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 20$ e $y = 10$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

1 **Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Elegimos para despejar la incógnita y en la primera ecuación.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow y = 5 - x$$

b) Sustituimos esta incógnita en la segunda ecuación.

$$x - 2y = 2 \xrightarrow{y = 5 - x} x - 2(5 - x) = 2$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$\boxed{x = }$

d) Sustituimos el valor de x obtenido en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la primera.

$x + y = 5$

$\boxed{} + y = 2$

$\boxed{y = }$

Solución del sistema: $\boxed{x = }$ $\boxed{y = }$

e) Comprobamos la solución del sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \boxed{} + \boxed{} &= 5 \\ \boxed{} - 2 \cdot \boxed{} &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 2 &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

Si obtenemos este resultado, los valores de x e y son correctos.

2 **Resuelve los sistemas mediante el método de sustitución y comprueba los resultados.**

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 8 \\ 2x - y &= 9 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -x + y &= 7 \\ 3x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$

3 **Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba la solución del siguiente sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-1}{5}+2y=1 \\ y+\dfrac{3x}{2}=2 \end{array}\right\}$$

a) Hallamos el común denominador.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-1}{5}+\dfrac{5\cdot 2y}{5}=\dfrac{5\cdot 1}{5} \\ \dfrac{2\cdot y}{2}+\dfrac{3x}{2}=\dfrac{2\cdot 2}{2} \end{array}\right\}$$

b) Quitamos los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-1}{\cancel{5}}+\dfrac{10y}{\cancel{5}}=\dfrac{5}{\cancel{5}} \\ \dfrac{2y}{\cancel{2}}+\dfrac{3x}{\cancel{2}}=\dfrac{4}{\cancel{2}} \end{array}\right\}$$

De esta manera obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-1+10y=5 \\ 2y+3x=4 \end{array}\right\}$$

Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. Comprueba la solución.

4 **Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba la solución del siguiente sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{3}+y=4 \\ x+\dfrac{y}{3}=6 \end{array}\right\}$$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación**, debemos:

a) **Despejar** la misma incógnita en las dos ecuaciones.

b) **Igualar** las expresiones obtenidas.

c) **Resolver** la ecuación de una incógnita que resulta.

d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.

e) **Comprobar** la solución obtenida.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}\right\}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita y de las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 11 - 3x &= y \end{aligned}\right\}$$

b) **Igualamos** las expresiones obtenidas.

$$2x + 1 = 11 - 3x$$

c) **Resolvemos** la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 11 - 3x \\ 2x + 3x &= 11 - 1 \\ 5x &= 10 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 2}$$

d) **Sustituimos** el valor $x = 2$ en cualquiera de las ecuaciones. En este caso, elegimos la segunda.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 11 \\ 3 \cdot 2 + y &= 11 \\ 6 + y &= 11 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 5}$$

e) **Comprobamos** la solución obtenida.

Para ello hay que sustituir el par de valores (2, 5) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=2,\, y=5} \left.\begin{aligned} 2 \cdot 2 - 5 &= -1 \\ 3 \cdot 2 + 5 &= 11 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 2$ e $y = 5$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

1 **Resuelve el sistema mediante el método de igualación y comprueba la solución.**

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y = 77} \\ \boldsymbol{x - y = 2} \end{array}\right\}$$

a) Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 77 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

b) Igualamos las ecuaciones obtenidas.

c) Resolvemos la ecuación de una incógnita obtenida.

d) Sustituimos el valor de una de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

e) Comprobamos la solución.

2 **Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de igualación y comprueba los resultados.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 20 \end{array}\right\}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resuelve mediante el método de igualación y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4 \\ x+y=10 \end{array}\right\}$$

a) Hallamos el común denominador.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x}{\cancel{6}}+\dfrac{2y}{\cancel{6}}=\dfrac{24}{\cancel{6}} \\ x+y=10 \end{array}\right\}$$

b) Quitamos los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=24 \\ x+y=10 \end{array}\right\}$$

Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. Comprueba la solución.

4 **Resuelve mediante el método de igualación y comprueba la solución del sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=6 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{2y}{9}=6 \end{array}\right\}$$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de reducción**, debemos:

a) **Buscar un sistema equivalente** donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.

b) **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando así una incógnita.

c) **Resolver** la ecuación que resulta.

d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.

e) **Comprobar** la solución obtenida.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + 2y = 25} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 40} \end{aligned}\right\}$$

a) **Obtenemos** un sistema equivalente.

Elegimos una incógnita en las dos ecuaciones, en este caso x.

Multiplicamos la primera ecuación por 2.

$$\left.\begin{aligned} 2(x + 2y = 25) \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\}$$

Ahora el sistema equivalente es:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y = 50 \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\}$$

b) **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar la x.

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ -\ (2x + 3y = 40) \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ -2x - 3y = -40 \\ \hline y = 10 \end{array}$$

c) **Resolvemos** la ecuación de una incógnita que resulta.

$$\boxed{y = 10}$$

d) **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en este caso en la primera ecuación.

$$x + 2y = 25$$
$$x + 2 \cdot 10 = 25$$
$$\boxed{x = 5}$$

e) **Comprobamos** el resultado.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y = 25 \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 5,\ y = 10} \left.\begin{aligned} 5 + 2 \cdot 10 = 25 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 40 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 25 = 25 \\ 40 = 40 \end{aligned}\right\}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 5$ e $y = 10$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

1 **Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba el resultado.**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} &= \mathbf{-10} \\ \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}\boldsymbol{y} &= \mathbf{140} \end{aligned}\right\}$$

a) Obtenemos un sistema equivalente. Elegimos una incógnita, por ejemplo la *y*.

Multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 2.

$$\left.\begin{aligned} 5(3x - 2y &= -10) \\ 2(4x + 5y &= 140) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 15x - 10y &= -50 \\ 8x + 10y &= 280 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Sistema equivalente}$$

b) Sumamos las dos ecuaciones para eliminar la *y*.

$$\begin{array}{rrcl} & 15x - \cancel{10y} & = & -50 \\ + & 8x + \cancel{10y} & = & 280 \\ \hline & 23x & = & 230 \end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$\boxed{x = \quad}$

d) Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtenemos el valor de *y*.

e) Comprobamos la solución.

2 **Resuelve por el método de reducción el sistema y comprueba el resultado.**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} &= \mathbf{26} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} &= \mathbf{-13} \end{aligned}\right\}$$

Elegimos una incógnita: ¿Por qué número tenemos que multiplicar las ecuaciones para que esa incógnita desaparezca al sumarlas?

$$\left.\begin{aligned} \boxed{}\,(3x + 2y &= 26) \\ \boxed{}\,(2x - 3y &= -13) \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

8 Proporcionalidad numérica

INTRODUCCIÓN

Comenzamos recordando la importancia del significado y la comprensión de las fracciones equivalentes. Objetos y situaciones de la vida real nos ayudan a introducir las relaciones entre magnitudes. Mediante la construcción de tablas de valores y la obtención de valores relacionados entre sí establecemos las relaciones de proporcionalidad.

Planteados los conceptos de magnitud y proporción, se resuelven situaciones problemáticas de la vida cotidiana mediante la aplicación de la regla de tres (conocidos tres de los valores) y el método de reducción a la unidad, en magnitudes directamente proporcionales.

Las relaciones entre magnitudes inversamente proporcionales plantean un mayor grado de dificultad, y se ofrecen desde el mismo punto de vista que las anteriores, mediante las relaciones entre proporciones y la reducción a la unidad.

También presentamos la resolución de problemas con porcentajes, relacionada con el concepto de regla de tres. Los aumentos y las disminuciones porcentuales ayudarán a los alumnos en la resolución de las actividades.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *magnitud* es cualquier cualidad o característica de un objeto que podemos medir. Cuando las magnitudes se relacionan entre sí se establece una relación de proporcionalidad.
- Una *razón* es el cociente entre dos números a y b que se pueden comparar: $\frac{a}{b}$.
- Si igualamos dos razones obtenemos una proporción. De una serie de razones se obtiene un valor constante llamado *constante de proporcionalidad*.
- Dos magnitudes son *directamente proporcionales* cuando al aumentar o disminuir una, también aumenta o disminuye la otra en la misma cantidad.
- Mediante la *regla de tres simple directa* calculamos el valor desconocido de una proporción en la que los valores son directamente proporcionales.
- Dos magnitudes son *inversamente proporcionales* cuando al aumentar o disminuir una, disminuye o aumenta la otra en la misma cantidad.
- Mediante la *regla de tres simple inversa* calculamos el valor desconocido de una proporción en la que los valores son inversamente proporcionales.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Identificar la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes.	• Concepto de magnitud y proporcionalidad. • Serie de razones iguales. Constante de proporcionalidad. • Proporciones. Propiedades.	• Identificación de las relaciones de proporcionalidad. • Construcción de tablas de valores de dos magnitudes. • Aplicación de las propiedades de las proporciones.
2. Reconocer magnitudes directamente proporcionales.	• Magnitudes directamente proporcionales. • Regla de tres simple directa. • Método de reducción a la unidad.	• Identificación de magnitudes directamente proporcionales. • Resolución de problemas: utilización de la regla de tres simple directa y reducción a la unidad.
3. Reconocer magnitudes inversamente proporcionales.	• Magnitudes inversamente proporcionales. • Regla de tres simple inversa. • Método de reducción a la unidad.	• Identificación de magnitudes inversamente proporcionales. • Resolución de problemas: utilización de la regla de tres simple inversa y reducción a la unidad.
4. Resolver problemas de porcentajes mediante regla de tres.	• Regla de tres y porcentaje.	• Resolución de problemas mediante el uso del tanto por ciento.

8 OBJETIVO 1
IDENTIFICAR LA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD ENTRE DOS MAGNITUDES

NOMBRE: ______________________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

FRACCIONES EQUIVALENTES

Para comprobar si dos fracciones son **equivalentes** se **multiplican en cruz**, obteniéndose, en el caso de que sí lo sean, el mismo resultado.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \qquad \underbrace{2 \cdot 15}_{30} = \underbrace{5 \cdot 6}_{30}$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES

Si se multiplican o se dividen el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero, obtenemos una fracción equivalente y el valor de la fracción no varía.

- $\frac{2}{5}$ *multiplicamos numerador y denominador por 3:* $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \rightarrow \underbrace{2 \cdot 15}_{30} = \underbrace{5 \cdot 6}_{30}$

  Si multiplicamos, se utiliza el término **amplificar**.

- $\frac{18}{12}$ *dividimos numerador y denominador entre 6:* $\frac{18 : 6}{12 : 6} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \rightarrow \underbrace{18 \cdot 2}_{36} = \underbrace{12 \cdot 3}_{36}$

  Si dividimos, se utiliza el término **simplificar**.

1 **Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones.**

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$

b) $\frac{4}{6}$ y $\frac{10}{15}$

c) $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{12}$

2 **Halla el término que falta para que sean equivalentes las fracciones.**

a) $\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$

b) $\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$

c) $\frac{6}{x} = \frac{4}{8}$

d) $\frac{x}{3} = \frac{6}{9}$

3 **Escribe 4 fracciones equivalentes a las dadas mediante amplificación.**

a) $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d) $\frac{7}{10} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

4 **Escribe 3 fracciones equivalentes a las dadas mediante simplificación.**

a) $\frac{40}{60} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\frac{132}{88} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\frac{60}{144} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d) $\frac{90}{120} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

CONCEPTO DE MAGNITUD. PROPORCIONALIDAD

- Una **magnitud** es cualquier cualidad o característica de un objeto que podemos medir.
  Ejemplo: la longitud, la masa, el número de alumnos, la capacidad, la velocidad, el precio, etc.
- Las magnitudes se expresan en unidades de medida: metros, kilómetros, kilogramos, gramos, número de personas, litros, kilómetros por hora, metros por segundo, euros, dólares, etc.
- En ocasiones las magnitudes se relacionan entre sí. Esta relación se denomina de **proporcionalidad**, y nos ayuda a solucionar problemas de la vida cotidiana.

EJEMPLO

Un saco de harina pesa 10 kilogramos, 2 sacos de harina pesan 20 kilogramos y 3 sacos pesan 30 kilogramos. ¿Cuánto pesan 4 sacos? ¿Y 5 sacos? ¿Y 6 sacos? ¿Y 10 sacos?

Tenemos dos magnitudes: *número de sacos de harina* y *peso de los sacos*.

Entre ambas existe una relación de proporcionalidad: cuantos más sacos sean, más pesarán.

Este ejemplo lo podemos expresar mediante una tabla, llamada **tabla de proporcionalidad**:

N.º DE SACOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PESO (kg)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

· 10 **: 10**

Las series de números de ambas magnitudes, número de sacos y peso, son proporcionales entre sí; por tanto, podemos pasar de una serie a otra, multiplicando o dividiendo por 10.

5 **Referido al ejemplo anterior:**

a) Indica el peso (en kg) de 15, 17, 18, 20, 50 sacos y elabora una tabla de proporcionalidad.

b) ¿Cuántos sacos suponen 700 kilogramos de harina? ¿Y 1.000 kg?

6 **En una cafetería cada menú: bebida, bocadillo y patatas cuesta 3 €. Elabora una tabla de proporcionalidad con las magnitudes que se relacionan y expresa la relación entre los 10 primeros menús que se compran.**

7 **En las siguientes tablas de proporcionalidad, averigua el número por el que hay que multiplicar y/o dividir para pasar de una serie a otra, y completa las tablas.**

a)

2	3	5	7	9	11
8	12				44

b)

1	2	3	4	5	6
5	10				

RAZÓN ENTRE DOS NÚMEROS O CANTIDADES

Una **razón** es el cociente entre dos números cualesquiera, *a* y *b*, que se pueden comparar: $\frac{a}{b}$.

En una razón, los números pueden ser naturales y/o decimales: $\frac{2,5}{5}$, $\frac{4}{3,5}$, $\frac{10}{25}$, mientras que en una fracción los números son naturales: $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{10}{25}$.

PROPORCIÓN

Si igualamos dos razones, obtenemos una **proporción**.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción.

TÉRMINOS DE UNA PROPORCIÓN		
	a, *c* se llaman antecedentes	*b*, *d* se llaman consecuentes
	a, *d* se llaman extremos	*b*, *c* se llaman medios

Lectura de las proporciones

La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*

La proporción $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ se lee: 3 es a 4 como 9 es a 12

Recuerda el ejemplo de los sacos de harina

N.º DE SACOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PESO (kg)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Formamos las siguientes proporciones y observamos que:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{2}{20} = 0,1 \quad \frac{3}{30} = 0,1 \quad \frac{4}{40} = 0,1 \quad \frac{5}{50} = 0,1 \ \dots \ \frac{10}{100} = 0,1$$

Son una serie de razones iguales. Su valor es el mismo: 0,1.

$$\frac{1}{10} = \frac{2}{20} = \frac{3}{30} = \frac{4}{40} = \frac{5}{50} = \frac{6}{60} = \frac{7}{70} = \frac{8}{80} = \frac{9}{90} = \frac{10}{100} = 0,1$$

- Este valor es constante y es el mismo en todas las proporciones.
- Se llama **constante de proporcionalidad**.

8 **Indica los términos antecedentes, consecuentes, extremos y medios.**

PROPORCIÓN	SE LEE	ANTECEDENTES	CONSECUENTES	EXTREMOS	MEDIOS
$\frac{4}{7} = \frac{16}{28}$					
$\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$					
$\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$					

9 **Observa la siguiente tabla de valores.**

3	9	18	27	36	45	54
1	3	6	9	12	15	18

a) Comprueba si forman una serie de razones iguales.
b) Halla el valor de cada proporción.
c) ¿Es el mismo en todas las proporciones? ¿Cómo se llama ese valor?

10 **Dadas estas series de razones iguales, añade tres proporciones e indica la constante de proporcionalidad.**

a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$

c) $\frac{10}{8} = \frac{20}{16} = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$

b) $\frac{6}{15} = \frac{12}{30} = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$

d) $\frac{5}{8} = \frac{15}{24} = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$

11 **Un quiosco vende las gominolas solo de una forma: 3 bolsas que cuestan 2 €.**

a) Forma una tabla de proporcionalidad si se adquieren 6, 9, 12, 15 y 18 bolsas de gominolas.
b) Escribe tres parejas de razones iguales.
c) Indica la constante de proporcionalidad.

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

1.ª La suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = k \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1+2+3+4}{2+4+6+8} = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

2.ª En una proporción, el producto de extremos es igual al producto de medios. *(Recuerda el concepto de fracciones equivalentes y los productos cruzados.)*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \qquad \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow 3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$$

12 **En las siguientes series de razones iguales, comprueba que la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad.**

a) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20}$

Constante de proporcionalidad = ...

b) $\frac{8}{2} = \frac{16}{24} = \frac{32}{8} = \frac{48}{12} = \frac{80}{20}$

Constante de proporcionalidad = ...

ADAPTACIÓN CURRICULAR

RECONOCER MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

- Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando:
  – Al **aumentar** una cantidad el doble, el triple..., la otra también **aumenta** el doble, el triple...
  – Al **disminuir** una cantidad la mitad, la tercera parte..., la otra también **disminuye** la mitad, la tercera parte...
- La razón entre dos cantidades es siempre la misma y se llama constante de proporcionalidad.

EJEMPLO

Un cupón de lotería cuesta 2 €, dos cupones 4 €, 3 cupones 6 €...

- Distinguimos dos magnitudes: *número de cupones* y *precio.*
  – Al **aumentar** el número de cupones, **aumenta** su precio.
  – Al **disminuir** el número de cupones, también **disminuye** su precio.
  – Son magnitudes directamente proporcionales:

N.º DE CUPONES	1	2	3	4	5	6
PRECIO (€)	2	4	6	8	10	12

·2 : 2

- Observamos las razones de las proporciones:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=0{,}5 \qquad \frac{3}{6}=\frac{5}{10}=0{,}5 \qquad \frac{4}{8}=\frac{6}{12}=0{,}5 \qquad \frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=0{,}5$$

  La constante de proporcionalidad es siempre la misma: 0,5. Son series de razones iguales y forman fracciones equivalentes.

- Multiplicando o dividiendo por el mismo número obtenemos valores equivalentes:

$$\frac{1}{2}\ \begin{matrix}\xrightarrow{\cdot 4}\\ \xrightarrow{\cdot 4}\end{matrix}\ \frac{4}{8} \qquad \frac{6}{12}\ \begin{matrix}\xrightarrow{:3}\\ \xrightarrow{:3}\end{matrix}\ \frac{2}{4} \qquad \frac{5}{10}\ \begin{matrix}\xrightarrow{:5}\\ \xrightarrow{:5}\end{matrix}\ \frac{1}{2}$$

1 **Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.**

a) El peso de unos bombones y el dinero que valen.
b) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.
c) El número de hojas de un libro y su peso.
d) El precio de una tela y los metros comprados.
e) La edad de un alumno y su altura.

2 **En una fábrica de ladrillos, 5 ladrillos apilados ocupan 1 metro de altura. Completa la tabla con los valores correspondientes.**

a) Indica si son magnitudes directamente proporcionales.
b) Forma proporciones y halla la constante de proporcionalidad.
c) ¿Qué altura ocuparían 100 ladrillos? ¿Y 500 ladrillos?

N.º DE LADRILLOS	5	10	15	20	25	30	50
ALTURA (m)	1						

3 **Luisa y Ana tienen que pintar durante el verano la valla de la casa de sus abuelos. La valla tiene una longitud de 30 metros y su abuelo les ha dicho que por cada 6 metros que pinten les dará 5 €.**

a) Forma la tabla de valores con las magnitudes correspondientes.

b) Forma proporciones y halla la constante de proporcionalidad.

c) Si la valla tuviera 42 metros, ¿cuánto dinero ganarían Luisa y Ana?

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

- La regla de tres simple directa nos permite **calcular el valor desconocido** de una proporción en la que las magnitudes son directamente proporcionales.
- Conocemos **tres** de los cuatro valores de la proporción, y el término desconocido (incógnita) lo nombramos con la letra ***x***, ***y*** o ***z***.

EJEMPLO

Tres cajas de latas de refrescos pesan 15 kg. ¿Cuánto pesarán 4 cajas?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si}\quad 3 \text{ cajas} \xrightarrow{\text{pesan}} 15 \text{ kg}\\ \quad\;\; 4 \text{ cajas} \xrightarrow{\text{pesarán}} x \text{ kg}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{15}{x} \rightarrow 3 \cdot x = 4 \cdot 15 \rightarrow 3x = 60 \rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{60}{3} \rightarrow x = 20$$

Las 4 cajas pesarán 20 kg.

4 **Si 4 pasteles cuestan 12 €, ¿cuánto costarán 6 pasteles? ¿Y 15 pasteles?**

5 **Tres obreros realizan una zanja de 6 m en un día. Si mantienen el mismo ritmo de trabajo, ¿cuántos metros de zanja abrirán en un día, si se incorporan 5 obreros más?**

6 **El precio de 12 fotocopias es 0,50 €. ¿Cuánto costará hacer 30 fotocopias?**

7 **Un excursionista recorre 10 km en 2,5 horas. Si mantiene el mismo ritmo ¿cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas? ¿Y en 7 horas?**

Podemos resolver los problemas mediante la regla de tres directa utilizando el **método de reducción a la unidad**, es decir, hallando el valor desconocido para el valor 1, y luego multiplicándolo por los restantes valores.

Resuelve los siguientes problemas, utilizando el método de reducción a la unidad.

8 **En un túnel de lavado se limpian 10 coches en una hora. ¿En cuánto tiempo se lavarán 25 coches? ¿Y 50 coches?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si 10 coches se lavan en} \longrightarrow 60 \text{ minutos} \\ \text{1 coche se lavará en} \longrightarrow \dfrac{60}{10} = 6 \text{ minutos} \end{array}\right\}$$

Después de calcular el tiempo que se tarda en lavar un coche, hallamos el tiempo empleado para lavar 25 y 50 coches.

25 coches se lavan en $25 \cdot 6 =$

9 **Ignacio cobra 120 € por cada 5 días de trabajo. ¿Cuánto cobrará por 15 días? ¿Y por 20 días?**

10 **Si 3 cafés cuestan 2,70 €, ¿cuánto costarán 5 cafés? ¿Y 10 cafés?**

11 **Un bono de autobús con diez viajes cuesta 6 €. ¿Cuánto cuesta cada viaje? ¿Y cuánto costarán 3 bonos?**

12 **Si 4 yogures valen 1,20 €, ¿cuánto cuestan 12 yogures? ¿Y 30 yogures?**

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

- Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando:
  – Al **aumentar** una el doble, el triple..., la otra **disminuye** la mitad, la tercera parte...
  – Al **disminuir** una la mitad, la tercera parte..., la otra **aumenta** el doble, el triple...
- Al multiplicar (o dividir) uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido (o multiplicado) por el mismo número.

EJEMPLO

Un grifo vierte 3 litros de agua cada minuto, tardando 15 minutos en llenar un tonel.
Si aumentamos el caudal a 6 litros por minuto, tarda 7,5 minutos en llenarlo.
Si lo aumentamos a 9 litros por minuto, lo llenará en 5 minutos. Si lo aumentamos a 12 litros por minuto, tardará 3,75 minutos, etc.

- Distinguimos dos magnitudes: *caudal de agua* (en litros por minuto) y *tiempo en llenar el tonel.*
  – Al **aumentar** el número de litros por minuto, **disminuye** el tiempo en que se llenaría el tonel.
  – Si **disminuye** el caudal, **aumenta** el tiempo.
  – Son magnitudes inversamente proporcionales:

CAUDAL (ℓ/min)	3	6	9	12
TIEMPO (min)	15	7,5	5	3,75

- Vemos que en las razones de las proporciones se invierte el orden de los valores:

$$\frac{3}{6} = \frac{7{,}5}{15} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{9} = \frac{5}{15} = 0{,}3 \qquad \frac{12}{6} = \frac{7{,}5}{3{,}75} = 2$$

- Al multiplicar (o dividir) uno de los valores, el valor correspondiente queda dividido (o multiplicado) por el mismo número.

· 2

3	6
15	7,5

: 2

· 4

3	12
15	3,75

: 4

· 3

3	9
15	5

: 3

1 **Indica si las siguientes magnitudes son o no inversamente proporcionales.**

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.

b) El número de operarios de una obra y el tiempo que tardan en terminarla.

c) El número de hojas de un libro y su peso.

d) El peso de la fruta y el dinero que cuesta.

e) La velocidad de un excursionista y la distancia que recorre.

f) El número de grifos de un depósito y el tiempo que tarda en llenarse.

2 **Completa estas tablas de valores inversamente proporcionales.**

a)

5	10	20	4		
60	30			25	5

b)

1	2		4		
36		12		6	4

c)

8			3	1	6
3	12	4			

d)

6	3	21	7		1
7				1	

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

- La regla de tres simple inversa nos permite **calcular el valor desconocido** de una proporción en la que las magnitudes son inversamente proporcionales.
- Conocemos **tres** de los cuatro valores de la proporción, y el valor desconocido (incógnita) lo nombramos con la letra ***x***, ***y*** o ***z***.

EJEMPLO

Diez albañiles tardan 45 días en construir un muro. Si deben terminar la obra en 15 días, ¿cuántos albañiles hacen falta?

Las magnitudes son *número de albañiles* y *días de trabajo*.

Son **inversamente** proporcionales: si queremos que se realice la obra en **menos** tiempo, tendremos que **aumentar** el número de trabajadores.

Lo resolvemos de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 10 \text{ albañiles} \xrightarrow{\text{tardan}} 45 \text{ días} \\ \quad x \text{ albañiles} \xrightarrow{\text{tardarán}} 15 \text{ días}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{10}{x} = \frac{15}{45} \rightarrow 10 \cdot 45 = x \cdot 15 \rightarrow 450 = 15x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{450}{15} = \frac{15x}{15} \rightarrow x = 30$$

30 albañiles terminarán la obra en 15 días.

3 **Averigua el número de albañiles que realizarían el anterior trabajo si quisiéramos que lo acabasen en 5 días.**

4 **Un depósito de agua se llena en 18 horas si un grifo vierte 360 litros de agua cada minuto.**

a) ¿Cuánto tardaría en llenarse si vertiera 270 litros por minuto?

b) ¿Y si salieran 630 litros por minuto?

5 **Un ganadero tiene 36 vacas y pienso suficiente para alimentarlas durante 24 días. Si decide comprar 18 vacas más, ¿para cuántos días tendría pienso?**

6 **Se está construyendo una autopista y hay que realizar un túnel en la montaña. Está planificado que dos máquinas realicen la obra en 90 días. Para reducir ese tiempo a la tercera parte, ¿cuántas máquinas harían falta?**

Podemos resolver los problemas mediante la regla de tres inversa utilizando el **método de reducción a la unidad**, es decir, hallando el valor desconocido para el valor 1, y luego dividiendo entre los valores correspondientes.

Resuelve los siguientes ejercicios, mediante el método de reducción a la unidad.

7 **Tres pintores tardan 2 horas en pintar una valla. Si se incorpora un pintor más, ¿cuánto tiempo tardarán?**

8 **Si 20 obreros levantan un muro de ladrillos en 6 días, ¿cuántos días tardarían 12 obreros?**

9 **En recorrer una distancia un camión tarda 4 horas a una velocidad constante de 65 km/h.**

a) ¿Qué velocidad llevará un automóvil que recorre la misma distancia en la mitad de tiempo?

b) ¿Y una avioneta que emplease 45 minutos?

8 OBJETIVO 4
RESOLVER PROBLEMAS DE PORCENTAJES MEDIANTE REGLA DE TRES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

1 **En una clase de 2.º ESO el 60 % son chicas. Si en total hay 30 alumnos, calcula el número de alumnas, alumnos y el porcentaje de estos últimos.**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si 30 alumnos} \xrightarrow{\text{son}} \text{el 100 \%} \\ x \text{ alumnos} \xrightarrow{\text{serán}} \text{el 60 \%} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{30}{x} = \frac{100}{60} \rightarrow 30 \cdot 60 = 100x$$

2 **Una fábrica produce 1.500 automóviles al mes. El 25 % son furgonetas, el 60 % turismos y el resto monovolúmenes. Halla las unidades producidas de cada tipo de automóvil.**

3 **Unas zapatillas que antes costaban 60 € tienen un descuento del 15 %. Calcula cuánto valen ahora.**

4 **En un instituto de 1.200 alumnos se han publicado los resultados de una encuesta sobre música moderna: el 30 % de los alumnos prefieren música tecno, el 25 % pop, un 40 % rock, y el resto, música melódica. Calcula los alumnos que prefieren cada modalidad musical y el porcentaje de los que eligen la música melódica.**

5 **De un colegio con 600 alumnos, el 50 % son de Educación Primaria, el 35 % de ESO y el 15 % de Bachillerato. Halla el número de alumnos de cada nivel educativo.**

6 **Un pantano tiene una capacidad total de 5 millones de metros cúbicos de agua. Actualmente está lleno al 75 % de su capacidad. Calcula los metros cúbicos de agua que contiene.**

9 Proporcionalidad geométrica

INTRODUCCIÓN

El estudio de la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras es algo complejo para los alumnos de este nivel educativo.

Comenzamos la unidad recordando y diferenciando los conceptos básicos de las aplicaciones lineales (recta, segmento y polígono), que son el paso previo al estudio de la proporcionalidad de segmentos y a la aplicación de los criterios de semejanza de figuras, en particular de los triángulos.

Se proponen problemas sencillos de segmentos iguales y proporcionales que se originan a partir de rectas paralelas, para continuar resolviendo problemas de semejanza de figuras. Será más conveniente incidir en los criterios de semejanza de triángulos que enunciar directamente el teorema de Tales y sus aplicaciones.

Destacamos la importancia de saber interpretar una escala en un mapa o en un plano, subrayando la relación entre la distancia que medimos en centímetros o milímetros y estableciendo la distancia real.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *recta* está formada por infinitos puntos; no tiene ni principio ni final. Por dos puntos siempre pasa una recta.
- Una *semirrecta* es una recta que tiene principio pero no final.
- Un *segmento* está delimitado por dos puntos.
- Un *polígono* es una figura formada por una línea poligonal cerrada. Está compuesto por varios elementos: diagonales, ángulos, lados y vértices.
- La *suma de los ángulos* de un polígono de n lados es: $180° \cdot (n - 2)$.
- El cociente entre la medida de dos segmentos es su *razón*. Dos segmentos son proporcionales si tienen la misma razón.
- Varias rectas paralelas cortadas por rectas secantes forman *segmentos proporcionales* entre sí.
- Dos *triángulos* son *semejantes* si tienen los tres ángulos iguales, los tres lados proporcionales, o si tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual.
- Mediante la *escala numérica y gráfica* podemos calcular distancias de planos y mapas. La medida que calculamos en el mapa (cm) equivale a una distancia real (km).

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Calcular la razón de dos segmentos.	• Recta, semirrecta y segmento. • El polígono y sus elementos. Suma de los ángulos de un polígono. • Razón de dos segmentos. Segmentos proporcionales.	• Trazado de rectas, semirrectas y segmentos. • Identificación de polígonos y sus elementos. Triangulación de polígonos. • Cálculo de la razón de dos segmentos. Construcción de segmentos proporcionales.
2. Aplicar los criterios de semejanza de segmentos y triángulos.	• Segmentos iguales y proporcionales de rectas paralelas. • División de un segmento en partes iguales. • Semejanza de triángulos.	• Identificación de segmentos proporcionales en rectas paralelas. • Expresión gráfica de la división de un segmento en partes iguales. • Aplicación de los criterios de semejanza de triángulos. Resolución de problemas.
3. Leer e interpretar escalas en planos y mapas.	• Concepto de escala. • Escala numérica y escala gráfica.	• Interpretación del significado de la escala. • Cálculo de distancias. Resolución de problemas.

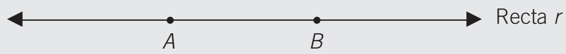
ADAPTACIÓN CURRICULAR

9 OBJETIVO 1
CALCULAR LA RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

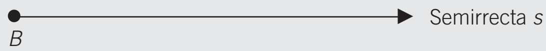
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

RECTA, SEMIRRECTA Y SEGMENTO

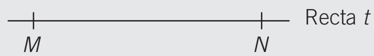
- Una **recta** es una línea continua formada por infinitos puntos, que no tiene ni principio ni final.
  – Dos puntos definen una recta.
  – Por un punto pasan infinitas rectas.



- Una **semirrecta** es una recta que tiene principio pero no final.
  Un punto cualquiera forma dos semirrectas sobre cada línea o dirección.



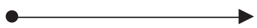
- Un **segmento** es la porción o parte de una recta delimitada por dos puntos.
  Los puntos *M* y *N* forman el segmento *MN*.

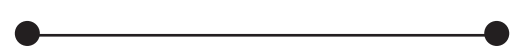


1 **Indica debajo de cada figura su nombre: recta, semirrecta o segmento.**

a) 

c) 

b) 

d) 

2 **Dibuja dos puntos cualesquiera, *P* y *T*, y traza una recta *m* que pase por ellos.**

3 **Dibuja un punto *A*, traza varias rectas que pasen por él y nómbralas con letras diferentes (*r*, *s*, *t*...).**

4 **Considera un punto *F* y traza dos semirrectas, *m* y *n*, que tengan su origen en él.**

5 **Dibuja cuatro segmentos, *AB, MN, PT* y *XY*, de medidas 3, 6, 8 y 10 cm, respectivamente.**

a) *AB*

c) *PT*

b) *MN*

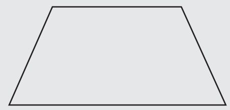
d) *XY*

POLÍGONOS

- Varios segmentos unidos entre sí forman una **línea poligonal**. Una línea poligonal cerrada es un polígono.
- Un **polígono** es una figura plana delimitada por una línea poligonal cerrada.

Línea poligonal abierta

Polígono (línea poligonal cerrada)

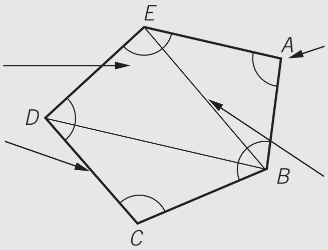


Elementos de un polígono

Los **ángulos** son las regiones que forman los lados al cortarse. Se escriben así: $\widehat{E}$.

Los **lados** son los segmentos que limitan el polígono.

La suma de las longitudes de los lados se llama **perímetro**.



Los **vértices** son los puntos donde se cortan los lados. Se nombran con una letra mayúscula.

Las **diagonales** son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

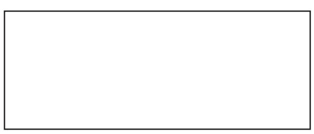
6 **Con segmentos de medidas 1, 2, 3 y 4 cm, respectivamente, dibuja una línea poligonal abierta y un polígono.**

a) Línea poligonal

b) Polígono

7 **Piensa en cuatro objetos con forma de polígono y dibújalos.**

a) Pizarra

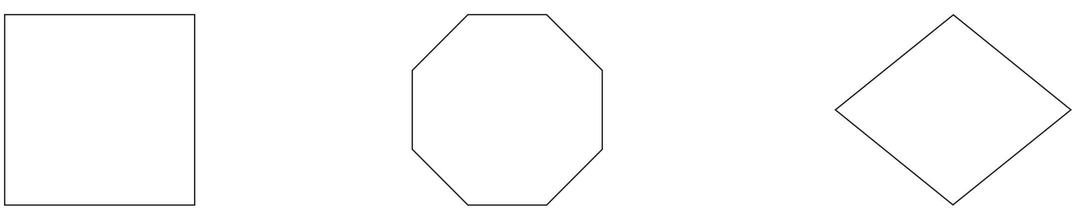


b)

c)

d)

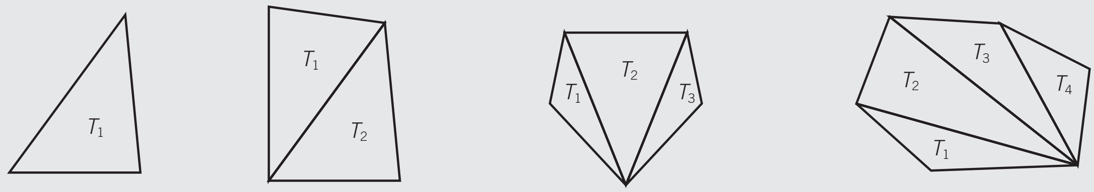
8 **Señala y nombra los vértices y lados de los polígonos, y dibuja los ángulos y las diagonales.**



ADAPTACIÓN CURRICULAR

SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN POLÍGONO

- Sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Por eso, para hallar la suma de los ángulos de un polígono debemos proceder a su triangulación, mediante el trazado de diagonales desde uno de los vértices del polígono.
- La **suma de los ángulos de un polígono** se calcula sumando 180° tantas veces como triángulos tenga el polígono.



$T_1 = 180°$

$T_1 + T_2 = 180° + 180° = 360°$

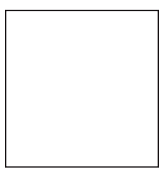
$T_1 + T_2 + T_3 = 180° + 180° + 180° = 540°$

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 180° + 180° + 180° + 180° = 720°$

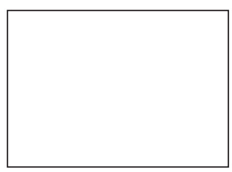
– Polígono de 3 lados: $180° \cdot (3 - 2) = 180° \cdot 1 = 180°$
– Polígono de 4 lados: $180° \cdot (4 - 2) = 180° \cdot 2 = 360°$
– Polígono de 5 lados: $180° \cdot (5 - 2) = 180° \cdot 3 = 540°$
– Polígono de 6 lados: $180° \cdot (6 - 2) = 180° \cdot 4 = 720°$
– Polígono de 7 lados: $180° \cdot (7 - 2) = 180° \cdot 5 = 900°$
– Polígono de n lados: $180° \cdot (n - 2)$

9 **Realiza la triangulación de estos polígonos, coloréalos y señala los triángulos que se forman.**

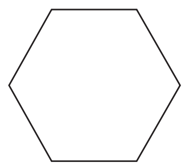
a) Cuadrado



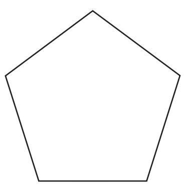
b) Rectángulo



c) Hexágono

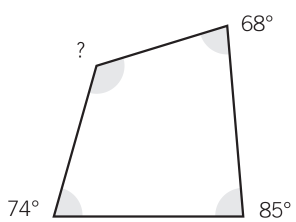


10 **Calcula el valor de cada uno de los ángulos de un pentágono regular.**

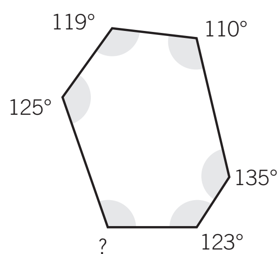


11 **Halla el valor del ángulo que falta en cada caso.**

a)



b)



RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

La razón de dos segmentos es el número que resulta de dividir sus longitudes.

EJEMPLO

Sean los segmentos *a* y *b*, de longitudes 3 cm y 5 cm. Halla su razón.

La razón de a y b es: $\frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

12 **Dibuja dos segmentos, *m* y *n*, de longitudes 3 cm y 4 cm, respectivamente. Halla su razón.**

13 **La razón de dos segmentos, *a* y *b*, es 0,5. Si *a* mide 2 cm, calcula el valor de *b*. Dibuja los segmentos.**

$\frac{a}{b} = 0{,}5 \quad \frac{2}{b} = 0{,}5$

14 **La razón de dos segmentos, *m* y *n*, es 0,75. Si *n* mide 4 cm, calcula el valor de *m*. Dibuja los segmentos.**

$\frac{m}{n} = 0{,}75$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Si la razón de dos segmentos, a y b, es la misma que la de otros dos segmentos, c y d, se dice que los segmentos son proporcionales, se escribe: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.

15 **Los segmentos *a* y *b* miden 3 cm y 4 cm, y los segmentos miden *c* y *d,* 6 cm y 8 cm. Dibújalos y comprueba que son proporcionales.**

16 **Dos segmentos, *a* y *b*, miden 4 cm y 5 cm y son proporcionales a otros dos segmentos *c* y *d*. Si el segmento *c* mide 8 cm, calcula el valor del segmento *d*.**

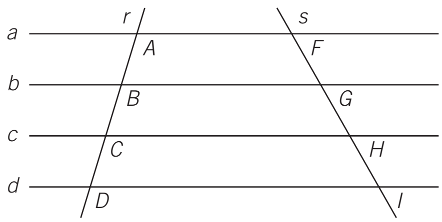
APLICAR LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA DE SEGMENTOS Y TRIÁNGULOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

SEGMENTOS IGUALES DE RECTAS PARALELAS

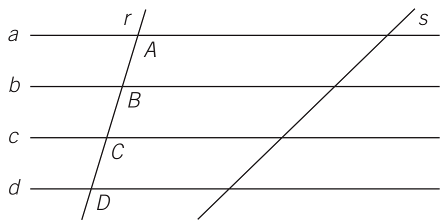
- Dibujamos cuatro rectas paralelas que estén a la misma distancia entre sí: *a*, *b*, *c* y *d*.
- Las cortamos por dos rectas secantes, *r* y *s*, que forman segmentos en ambos lados.
- Los segmentos que se originan en la recta *r* son iguales entre sí y los segmentos que se originan en la recta *s* también lo son.

EJEMPLO



Segmentos de la recta *r*: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$
Segmentos de la recta *s*: $\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI}$

1 **Fíjate en el siguiente dibujo.**



a) Nombra los segmentos que se originan al trazar la recta *s*.

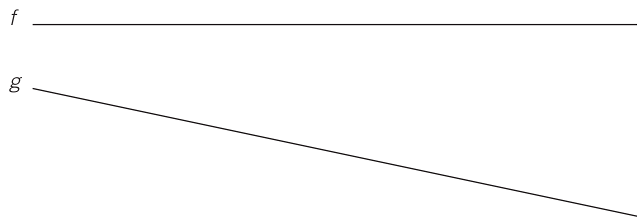
b) Verifica que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$.

c) Comprueba lo mismo para los segmentos de la recta *s*.

2 **Sobre las rectas, *f* y *g*, traza cuatro rectas paralelas que estén a una distancia de 1,5 cm entre sí.**

a) Nombra los segmentos que se originan al cortar las paralelas en *f* y *g*.

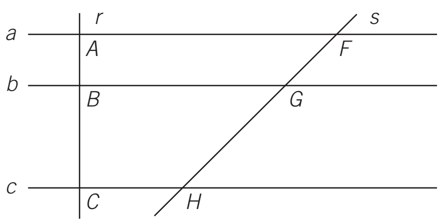
b) Comprueba que los segmentos que se forman en cada recta son iguales.



SEGMENTOS PROPORCIONALES DE RECTAS PARALELAS

- Dibujamos varias rectas paralelas: *a*, *b* y *c*.
- Las cortamos por dos rectas secantes, *r* y *s*, que forman segmentos en ambos lados.
- Los segmentos que originan las rectas *r* y *s* son proporcionales entre sí.

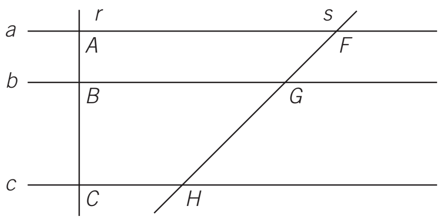
EJEMPLO



$\overline{AB}$ es a $\overline{BC}$ como $\overline{FG}$ es a $\overline{GH}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GH}}$$

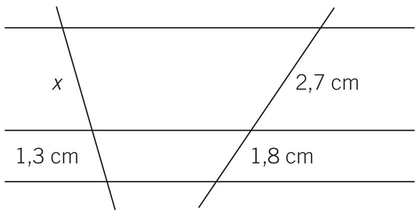
3 **Fíjate en el dibujo y halla el valor del segmento *GH*.**



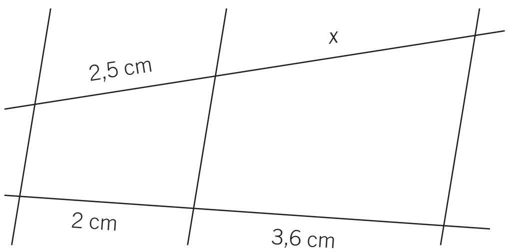
$\overline{AB} = 2$ cm $\quad \overline{FG} = 2{,}5$ cm

$\overline{BC} = 4$ cm $\quad \overline{GH} = ?$

4 **Nombra los segmentos con letras mayúsculas y las rectas con minúsculas, y calcula el valor del segmento *x*.**



5 **Calcula el valor del segmento que falta. Nombra los segmentos y las rectas.**



DIVIDIR UN SEGMENTO *AB* EN PARTES IGUALES

Seguimos estos pasos.

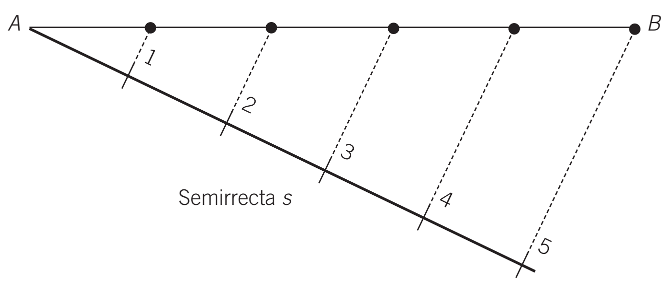
1.º Trazamos una semirrecta (*s*) con origen en *A* y señalamos en ella tantos segmentos (1-5) iguales y consecutivos (de la medida que mejor nos parezca) como partes sean.

2.º Unimos el último segmento (5) con el extremo *B*.

3.º Trazamos paralelas a este y quedan señaladas las partes iguales en *AB*.

EJEMPLO

Divide el segmento *AB* en 5 partes iguales.



ADAPTACIÓN CURRICULAR

6 **Divide el segmento *MN* en 7 partes iguales.**

7 **Divide un segmento de 6 cm en ocho partes iguales.**

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

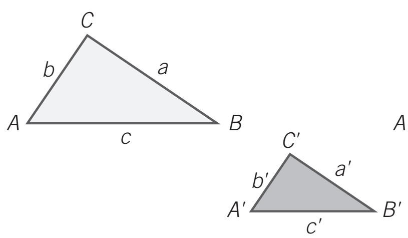
Dos triángulos son semejantes si se cumple cualquiera de estas condiciones.

1.ª Tener los **tres lados proporcionales**.
2.ª Tener los **tres ángulos iguales**.
3.ª Tener **dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual**.

EJEMPLO

Primer criterio

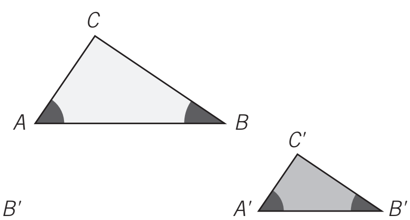
Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados proporcionales.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Segundo criterio

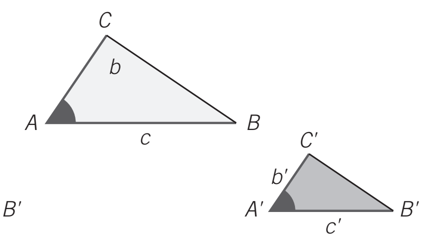
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.



$$\widehat{A} = \widehat{A}'; \widehat{B} = \widehat{B}'$$
$$\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{C}'$$

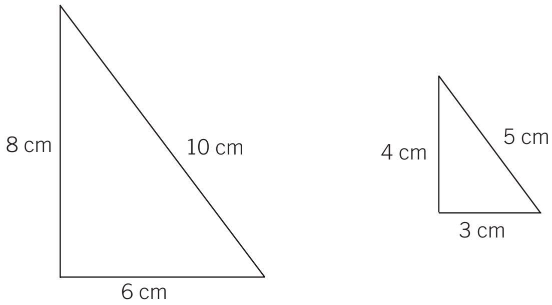
Tercer criterio

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.



$$\widehat{A} = \widehat{A}'; \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

8 **La medida de los lados de los siguientes triángulos es:**



a) Nombra los lados de cada triángulo.

b) Comprueba que son semejantes.

c) ¿Qué criterio has aplicado?

9 **En un triángulo conocemos los siguientes datos.**

Lado $AG = 4$ cm Lado $GC = 6$ cm $\widehat{G} = 60°$

Y en otro triángulo conocemos:

Lado $DE = 8$ cm Lado $EF = 12$ cm $\widehat{E} = 60°$

a) Comprueba si son semejantes.

b) Indica el criterio aplicado.

c) Realiza un dibujo representativo.

10 **Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo común que mide 40°.**

a) ¿Son semejantes? ¿Por qué?

b) Realiza un dibujo representativo.

11 **Los lados de un triángulo miden 3 cm, 5 cm y 9 cm. Indica las medidas de un triángulo semejante al primero. Razona tu respuesta y realiza un dibujo representativo.**

12 **El ángulo de un triángulo mide 75°, y los lados que lo forman, $AC = 4$ y $CD = 6$ cm. ¿Cuál de las siguientes opciones correspondería a un triángulo semejante al dado? Razona tu respuesta y realiza un dibujo representativo.**

a) Ángulo = 65°; lados $MH = 8$ cm y $HN = 10$ cm.

b) Ángulo = 75°; lados $MH = 8$ cm y $HN = 10$ cm.

c) Ángulo = 75°; lados $MH = 8$ cm y $HN = 12$ cm.

d) Ángulo = 90°; lados $MH = 8$ cm y $HN = 12$ cm.

9 OBJETIVO 3
LEER E INTERPRETAR ESCALAS EN PLANOS Y MAPAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ESCALA DE UN PLANO O MAPA

- Las distancias y tamaños de los planos y mapas están reducidos, de manera que se pueden observar fácilmente.
- Los valores son proporcionales a la distancia o tamaño real.
- Mediante la **escala** relacionamos la distancia o el tamaño que hay en un plano o mapa con la distancia o tamaño reales.

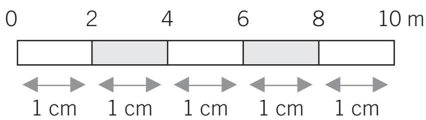
$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia o tamaño sobre el plano o mapa}}{\text{Distancia o tamaño en la realidad}}$$

EJEMPLO

Escala numérica 1 : 300

1 cm del dibujo, plano o mapa equivale a 300 cm de la realidad (300 cm = 3 m).

Escala gráfica



Según esta escala:

5 cm del dibujo, plano o mapa equivalen a 10 m de la realidad.

1 cm del dibujo, plano o mapa equivale a 2 m de la realidad.

1 **Completa la siguiente tabla.**

ESCALA	DISTANCIA EN EL MAPA O PLANO	DISTANCIA REAL (cm)	DISTANCIA REAL (m)
1 : 100			
1 : 2.000			
1 : 20.000			
1 : 350.000			
1 : 2.000.000			

2 **Expresa, mediante una escala numérica y una escala gráfica.**

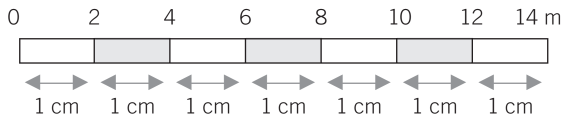
a) 1 cm en el plano equivale a 2 km en la realidad.

Escala numérica *Escala gráfica*

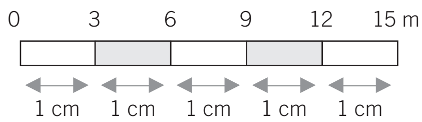
b) 1 cm en el plano equivale a 25 km en la realidad.

Escala numérica *Escala gráfica*

3 **Según las siguientes escalas, completa las equivalencias.**

a) 

ESCALA GRÁFICA	REALIDAD (m)
1 cm	
2 cm	
5 cm	
10 cm	

b) 

ESCALA GRÁFICA	REALIDAD (km)
1 cm	
3 cm	
5 cm	
12 cm	

4 **Un mapa de carreteras está elaborado a escala 1 : 200.000.**

a) ¿Qué significa esto?

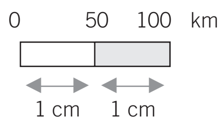
b) Una distancia de 4 cm en el mapa, ¿cuántos metros y kilómetros son en la realidad?

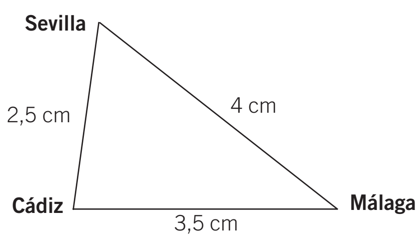
5 **El plano de una casa está dibujado a escala 1 : 100. Si una habitación en el plano mide 3 $\times$ 4 cm, ¿cuánto medirá en la realidad?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si en el plano 1 cm} \xrightarrow{\text{mide}} \text{100 cm reales} \\ \text{en el plano 3 cm} \xrightarrow{\text{medirá}} \text{x cm reales} \end{array}\right\}$$

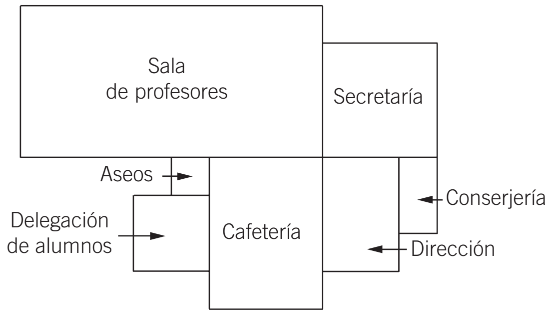
6 **Considera la distancia en línea recta entre las siguientes ciudades en un plano. Halla la distancia real en km entre:**

a) Sevilla-Cádiz   b) Sevilla-Málaga   c) Cádiz-Málaga





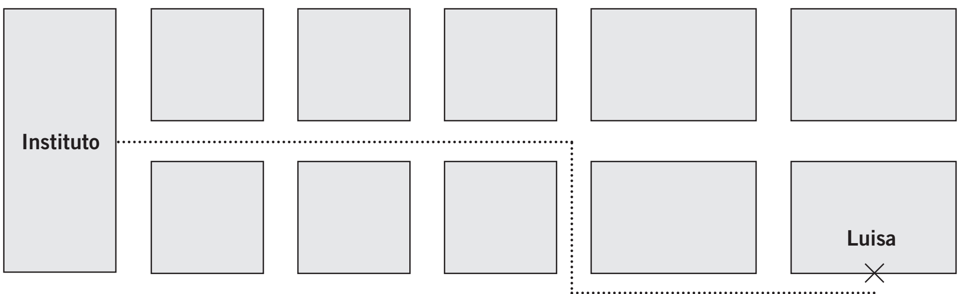
7 **La planta baja del instituto viene representada por el siguiente plano.**



Calcula las medidas reales de cada dependencia, sabiendo que la escala es 1 : 400.

DEPENDENCIA	MEDIDAS EN PLANO (cm)	MEDIDAS REALES (m)
Secretaría		
Sala de profesores		
Conserjería		
Dirección		
Cafetería		
Delegación de alumnos		
Aseos		

8 **Halla la distancia que recorre Luisa para ir al instituto, si el plano está hecho a escala 1 : 4.000.**



10 Figuras planas. Áreas

INTRODUCCIÓN

Por el teorema de Pitágoras, podemos calcular cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo en función de los otros. Se plantean problemas relacionados con dicho teorema en los que la interpretación gráfica de los mismos nos ayuda en su resolución.

Continuamos esta unidad recordando las unidades de longitud y superficie, y las conversiones entre ellas. Se hace también mención a las diferentes unidades para medir superficies agrarias. Los conceptos de perímetro de un polígono y área de una figura se introducen previamente al cálculo de las áreas de los principales paralelogramos y polígonos regulares: triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, y polígonos de lados iguales.

Siendo conocida ya por los alumnos la relación entre el perímetro o la longitud de la circunferencia y su diámetro, procedemos a calcular el área de la superficie que delimita, es decir, la superficie del círculo, que se introduce como un polígono de muchos lados iguales, por lo que su área se halla en función del perímetro y el radio. Los ejemplos gráficos y relacionados con la vida real nos ayudarán en la resolución de problemas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Teorema de Pitágoras*: en un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- El *metro* es la unidad principal de longitud. El paso entre las unidades de longitud se efectúa multiplicando o dividiendo por 10.
- El *metro cuadrado* es la unidad principal de superficie. Para transformar las unidades de superficie se multiplica o se divide por 100. El área y la hectárea son unidades de superficie agrarias.
- El *perímetro de un polígono* es la medida de su contorno. Para calcularlo sumamos todos sus lados.
- El *área de una figura* es la medida de su superficie. Calculamos las áreas de los principales polígonos: triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y polígonos regulares.
- La *longitud o perímetro de la circunferencia* es igual al diámetro (dos veces el radio) multiplicado por el número π.
- El *círculo* es la superficie que ocupa una circunferencia. El área de un círculo es igual a π multiplicado por el radio al cuadrado.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Comprender el teorema de Pitágoras.	• Triángulo rectángulo. • Área de los cuadrados sobre los lados. • Teorema de Pitágoras: enunciado.	• Reconocimiento de los lados de un triángulo rectángulo. • Aplicación del teorema de Pitágoras. • Resolución de problemas.
2. Conocer las unidades de longitud y superficie. Calcular perímetros.	• Unidades de longitud y superficie. • Múltiplos y submúltiplos. Unidades agrarias. • Perímetro de un polígono.	• Identificación de magnitudes. Conversión de unidades de longitud y superficie. • Resolución de problemas. • Cálculo de perímetros.
3. Calcular el área de los principales polígonos.	• Área de una figura. • Área de polígonos: rectángulo, cuadrado, rombo, romboide y triángulo. • Área de polígonos regulares.	• Estimación de áreas. • Cálculo del área de los principales paralelogramos y polígonos regulares. • Resolución de problemas.
4. Calcular el área y el perímetro de figuras circulares.	• Circunferencia y círculo. • Relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Número π. • Área del círculo.	• Relación de la longitud de la circunferencia y su diámetro. • Cálculo de la superficie del círculo. • Resolución de problemas.

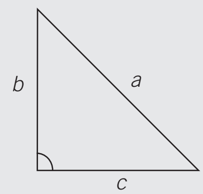
10 OBJETIVO 1

COMPRENDER EL TEOREMA DE PITÁGORAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

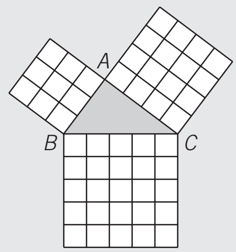
TRIÁNGULO RECTÁNGULO

- Un triángulo rectángulo tiene un **ángulo recto (90°)**.
- Los lados que forman el ángulo recto se denominan **catetos**, ***b*** **y** ***c***.
  El lado mayor se llama **hipotenusa**, ***a***.
- Ejemplos de triángulos rectángulos son la escuadra y el cartabón.

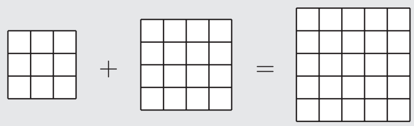


CUADRADOS SOBRE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

- Sobre los lados de un triángulo rectángulo construimos cuadrados, como se ve en la figura.



- La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los dos catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.



1 **Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm.**

a) Forma el ángulo recto con ambos catetos y comprueba que mide 90º.

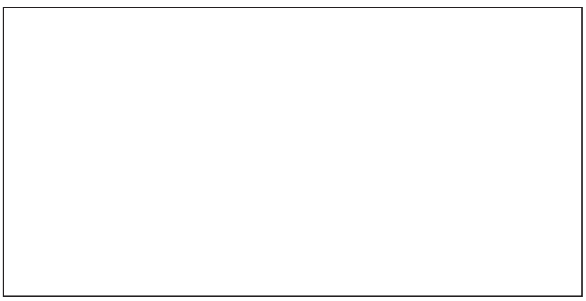
b) Mide la longitud del lado mayor: hipotenusa.

c) Nombra sus elementos: ángulo recto y lados.

2 **Traza una diagonal sobre el siguiente rectángulo e indica.**

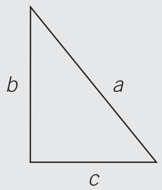
a) ¿Qué polígonos se han formado?

b) Nombra sus elementos.



TEOREMA DE PITÁGORAS

- Pitágoras fue un científico de la época griega, que enunció el teorema que lleva su nombre y que afirma: «En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos».



$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ Despejando $\longrightarrow$ $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

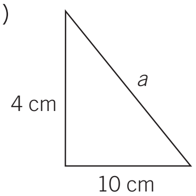
- Se pueden hallar los valores de los catetos en función de los otros valores:

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{Despejando} \longrightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

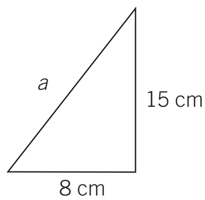
$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{Despejando} \longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

3 **Calcula el valor de la hipotenusa en los siguientes triángulos rectángulos.**

a)

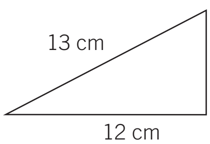


b)

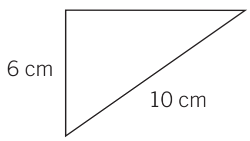


4 **Obtén el valor de los catetos que faltan en cada triángulo rectángulo.**

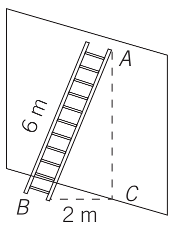
a)



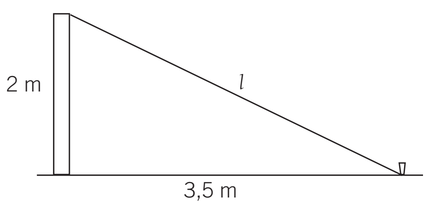
b)



5 **Una escalera que mide 6 m se apoya en una pared. Desde la base de la escalera a la pared hay una distancia de 2 m. Halla la altura marcada en la pared por la escalera.** ***(En la figura, la distancia* AC*.)***



6 **Pedro y Elisa quieren sujetar con una cuerda un poste de 2 m de altura a una estaca que está situada a 3,5 m de la base del poste. Calcula la longitud de la cuerda que necesitan.**



ADAPTACIÓN CURRICULAR

10 OBJETIVO 2
CONOCER LAS UNIDADES DE LONGITUD Y SUPERFICIE. CALCULAR PERÍMETROS

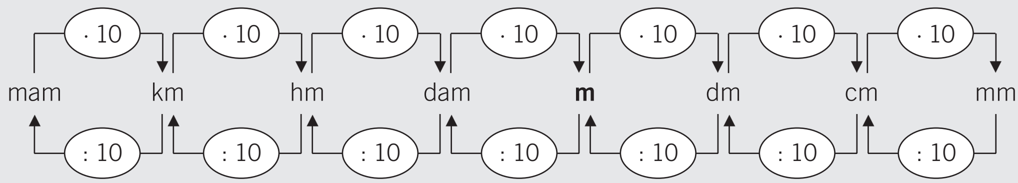
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

UNIDADES DE LONGITUD

- El **metro** es la unidad principal de longitud. Abreviadamente se escribe **m**.
- Los **múltiplos** (unidades mayores) y **submúltiplos** (unidades menores) del metro son:

MÚLTIPLOS DEL METRO				UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL METRO		
10.000 m miriámetro mam	1.000 m kilómetro km	100 m hectómetro hm	10 m decámetro dam	**metro** **m**	0,1 m decímetro dm	0,01 m centímetro cm	0,001 m milímetro mm

- Cada unidad es 10 veces mayor que la inmediata inferior y 10 veces menor que la inmediata superior.



1 **Expresa cada longitud en la unidad indicada.**

a) 34 km = 34 · 1.000 = ... m

b) 348 m = ... = ... hm

c) 0,8 hm = ... = ... km

d) 7 cm = 7 : 10 = ... dm

e) 4,3 hm = ... = ... m

f) 7,5 dm = ... = ... cm

2 **Ordena, de mayor a menor (>), las siguientes medidas. Toma como referencia el metro y transforma todas las medidas en esa unidad.**

0,34 km – 45 dm – 5 m – 678 cm – 12 m – 0,25 km – 9,5 dam – 5.500 mm – 0,01 km – 2,83 dam

3 **Dibuja con tu regla cuatro segmentos de longitudes 5, 7, 12 y 14 cm, respectivamente. Nómbralos y completa la tabla adjunta.**

SEGMENTO	LONGITUD DEL SEGMENTO (cm)	EQUIVALENCIA (m)	EQUIVALENCIA (dm)

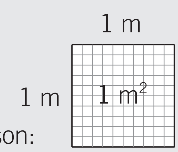
4 **Completa la siguiente tabla.**

	km	hm	m	dm	cm
5 m					
2,3 km					
153 dm					
6,5 hm					
2.000 cm					

5 **Completa la tabla.**

LONGITUD (km)	LONGITUD (hm)	LONGITUD (m)
		2.850.000
11.200		
	9.270	
913		
		743.000
680		
		535.000
	3.410	
336		

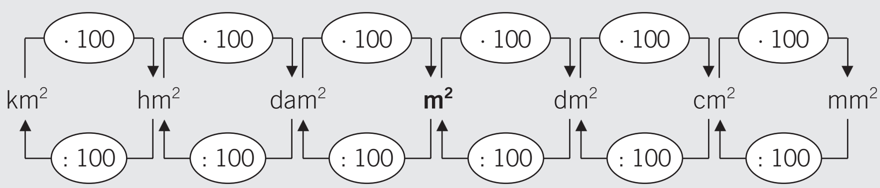
UNIDADES DE SUPERFICIE



- El **metro cuadrado** es la unidad principal de superficie. Se escribe **m^2**.
- Un metro cuadrado es la superficie de un cuadrado que tiene 1 metro de lado.
- Los **múltiplos** (unidades mayores) y **submúltiplos** (unidades menores) del metro cuadrado son:

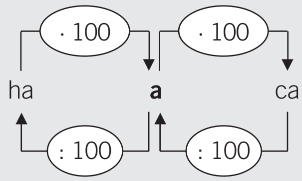
MÚLTIPLOS DEL METRO CUADRADO			UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL METRO CUADRADO		
1.000.000 m^2 kilómetro cuadrado km^2	10.000 m^2 hectómetro cuadrado hm^2	100 m^2 decámetro cuadrado dam^2	**metro cuadrado m^2**	0,01 m^2 decímetro cuadrado dm^2	0,0001 m^2 centímetro cuadrado cm^2	0,000001 m^2 milímetro cuadrado mm^2

- Cada unidad es 100 veces mayor que la inmediata inferior y 100 veces menor que la inmediata superior.



Para medir extensiones de campo, fincas, bosques, etc., se utilizan otras unidades:

UNIDADES	SÍMBOLO	EQUIVALENCIA	EQUIVALENCIA EN m^2
Hectárea	ha	1 hm^2	10.000 m^2
Área	a	1 dam^2	100 m^2
Centiárea	ca	1 m^2	1 m^2



6 **Completa las siguientes igualdades.**

a) 90 m^2 = 950 · 100 = ... dm^2

b) 43,2 cm^2 = ... = ... dm^2

c) 0,67 m^2 = ... = ... cm^2

d) 54 dm^2 = 54 : 100 = ... m^2

e) 0,463 km^2 = ... = ... hm^2

f) 82 dam^2 = ... = ... m^2

7 **Si 1 m^2 es la superficie de un cuadrado de 1 m de lado, expresa lo que sería:**

a) 1 cm^2

b) 1 mm^2

c) 1 km^2

d) 1 dam^2

8 **Expresa las siguientes unidades de superficie en su correspondiente equivalencia.**

EXPRESIÓN (ha)	EQUIVALENCIA (a)	EQUIVALENCIA (m^2)
Un campo de girasoles de 3 hectáreas		
Un bosque de 250 hectáreas		
Una finca de 10 hectáreas		
Un terreno de cultivo de 2,4 hectáreas		

9 **Ordena, de menor a mayor (<), las siguientes medidas. Toma como referencia el metro cuadrado y transforma todas las medidas en esta unidad.**

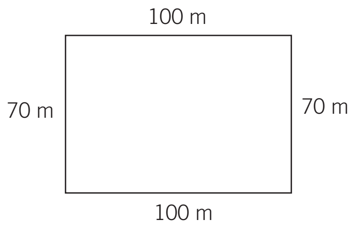
0,024 dm^2 – 32 m^2 – 8.400 dm^2 – 0,75 hm^2 – 0,0024 km^2 – 12 dam^2 – 865.271 mm^2 – 50 m^2

PERÍMETRO DE UN POLÍGONO

El perímetro de un polígono es la medida de su contorno. Para calcularlo **sumamos sus lados**.
Lo expresamos con la letra P.

EJEMPLO

Halla el perímetro de un campo de fútbol de lados 100 m y 70 m.



$P = 100 + 70 + 100 + 70 = 340$ m

El perímetro es una medida de longitud.

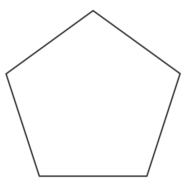
10 **Calcula el perímetro del tablero de tu pupitre y de una baldosa del suelo de tu aula. Realiza un dibujo significativo.**

Tablero del pupitre

Baldosa

11 **Halla el perímetro de los siguientes polígonos regulares. Realiza un dibujo a escala de cada figura.**

a) Pentágono, de 5 cm de lado.



b) Triángulo equilátero, de 3 cm de lado.

c) Hexágono, de 7 cm de lado.

d) Cuadrado, de 10 cm de lado.

CALCULAR EL ÁREA DE LOS PRINCIPALES POLÍGONOS

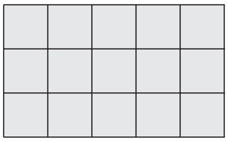
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ÁREA DE UNA FIGURA

- El área de una figura es la medida de su superficie, e indica el número de veces que contiene la unidad de superficie.
- El valor del área depende de la unidad de medida que tomemos.
- Lo expresamos con la letra *A*.

EJEMPLO

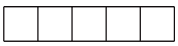
Tomando como unidad de superficie un cuadradito, calcula el área de la siguiente figura.



- La figura contiene 15.
- Su área es: $A = 15$ unidades de superficie.

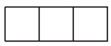
- Si cada cuadradito tuviera 1 cm de lado, su área sería 1 cm^2. 1 cm
- Y el área de la figura sería 15 cm^2.

1 **Tomando como unidad de medida un cuadrado, expresa el área de cada figura.**

a) 

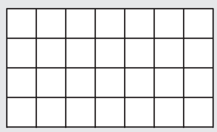
c) 

b) 

d) 

ÁREA DEL RECTÁNGULO

- El rectángulo de la figura realizada a escala tiene 28 cuadrados de 1 cm^2 cada uno.
- Son 7 columnas y 4 filas.
- Para hallar el área del rectángulo se multiplica la longitud de la base por la longitud de la altura.



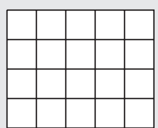
Altura = 4 cm

Base = 7 cm

Área rectángulo = base · altura $\rightarrow A = b \cdot h = 7\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 28\text{ cm}^2$

ÁREA DEL CUADRADO

- El cuadrado de la figura realizada a escala tiene 25 cuadrados de 1 cm^2.
- Son 5 columnas y 5 filas.
- Para hallar el área del cuadrado se multiplica la longitud de un lado por la longitud del otro lado.



Lado = 5 cm

Lado = 5 cm

Área cuadrado = lado · lado $\rightarrow A = l \cdot l = 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2$

2 **Obtén el área de estos rectángulos y realiza un dibujo representativo.**

a) Base = 10 cm Altura = 4 cm

b) Base = 12 cm Altura = 6 cm

3 **Determina el área de los cuadrados y realiza un dibujo representativo.**

a) Lado = 4 cm

b) Lado = 8 cm

4 **Un rectángulo tiene 36 cm^2 de área y 12 cm de base. Calcula.**

a) La altura del rectángulo.

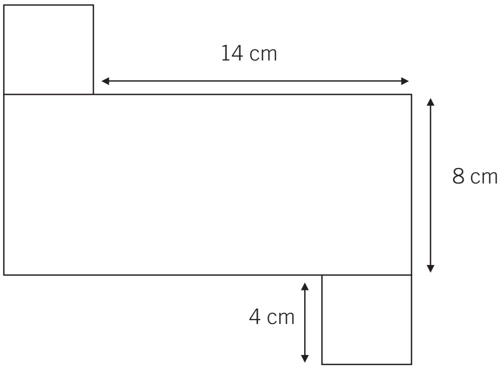
b) El perímetro del rectángulo.

5 **Si un cuadrado tiene 64 cm^2 de área, halla.**

a) El lado del cuadrado.

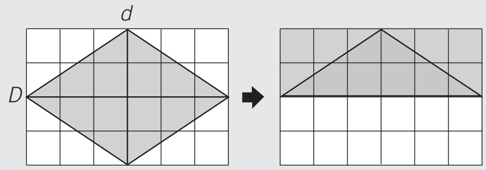
b) El perímetro del cuadrado.

6 **Halla el área de esta figura, compuesta por dos cuadrados iguales y un rectángulo.**



ÁREA DEL ROMBO

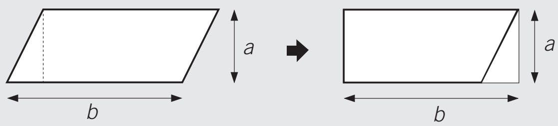
El área del rectángulo es el producto de la base por la altura.
El rombo ocupa la mitad de la superficie del rectángulo.



$$\textbf{Área rombo} = \frac{\textbf{diagonal mayor} \cdot \textbf{diagonal menor}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{D \cdot d}}{\mathbf{2}}$$

ÁREA DEL ROMBOIDE

El romboide lo podemos transformar en rectángulo.
El área de un romboide es el área de un rectángulo de igual base y altura.



$$\textbf{Área romboide} = \textbf{base} \cdot \textbf{altura} = \boldsymbol{b \cdot h}$$

7 **Obtén el área de los siguientes rombos y realiza un dibujo representativo a escala.**

a) Diagonal mayor = 7 cm
Diagonal menor = 3 cm

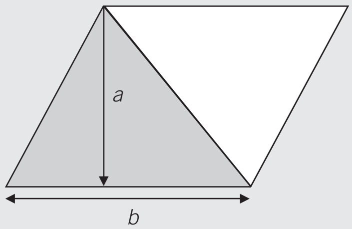
b) Diagonal mayor = 10 cm
Diagonal menor = 5 cm

8 **Calcula el área de estos romboides y haz un dibujo representativo a escala.**

a) Base = 8 cm
Altura = 2 cm

b) Base = 12 cm
Altura = 5 cm

ÁREA DEL TRIÁNGULO

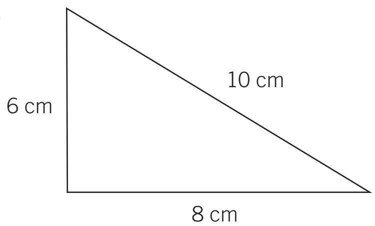


- Al trazar la diagonal del romboide, este queda dividido en dos triángulos.
- El triángulo gris y el triángulo blanco ocupan la misma superficie.
- Área triángulo $= \dfrac{\text{área de romboide}}{2} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$$\boxed{\textbf{Área triángulo} = \frac{\boldsymbol{b \cdot h}}{\mathbf{2}}}$$

9 **Calcula el área y el perímetro de los triángulos.**

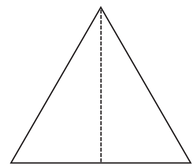
a)



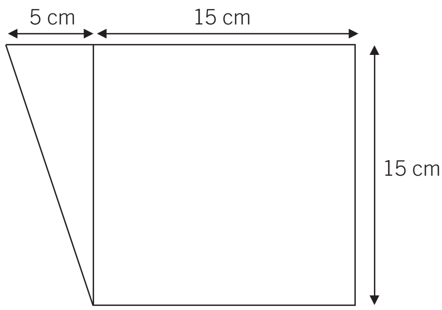
b) Triángulo equilátero

Lado = 6 cm

Altura = 5,2 cm

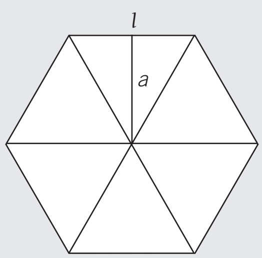


10 **Obtén el área de la siguiente figura.**

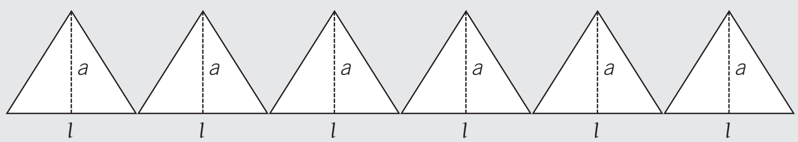


ÁREA DEL POLÍGONO REGULAR

El siguiente hexágono regular se descompone en 6 triángulos iguales cuya altura es la apotema, *a*.



- Área de cada triángulo $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{\text{lado} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{l \cdot a}{2}$



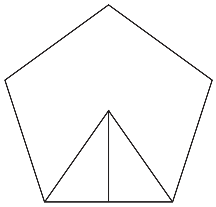
- Área de los 6 triángulos $= 6 \cdot \dfrac{l \cdot a}{2} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

Perímetro del hexágono $= 6 \cdot l$

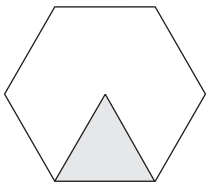
$$\boxed{\textbf{Área polígono regular} = \frac{\textbf{perímetro} \cdot \textbf{apotema}}{\mathbf{2}}}$$

11 **Calcula el perímetro y el área de los siguientes polígonos.**

a) Pentágono regular — Lado = 5 cm; Apotema = 3,44 cm

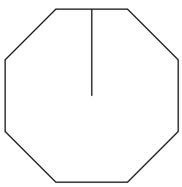


b) Hexágono regular — Área del triángulo = 15,6 cm²; Lado = 6 cm

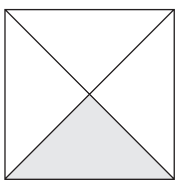


12 **Determina el perímetro y el área de las figuras.**

a) Octógono regular — Apotema = 2,41 cm; Lado = 2 cm

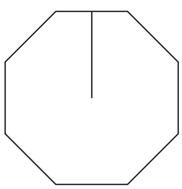


b) Cuadrado — Lado = 10 cm; Área del triángulo = 25 cm²

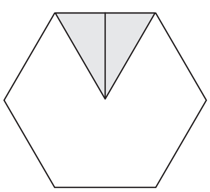


13 **Halla lo que mide el lado de estos polígonos.**

a) Octógono regular — Área del octógono = 1.920 cm²; Apotema = 24 cm



b) Hexágono regular — Área del hexágono = 345 cm²; Apotema = 10 cm



CALCULAR EL ÁREA Y EL PERÍMETRO DE FIGURAS CIRCULARES

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

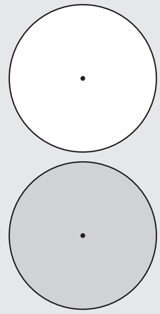
CONCEPTOS DE CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Circunferencia

La circunferencia es una línea curva cerrada y plana cuyos puntos están situados a la misma distancia del centro.

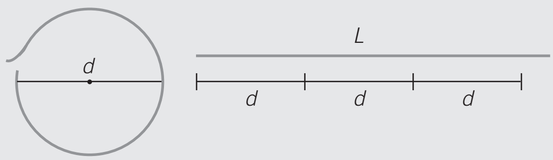
Círculo

El círculo es la figura plana formada por la circunferencia y su interior.



RELACIÓN ENTRE LA CIRCUNFERENCIA Y SU DIÁMETRO

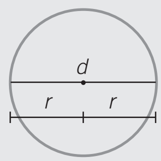
- Imagina que extendemos el contorno completo de la circunferencia y lo comparamos con el diámetro.



La longitud de la circunferencia es un poco mayor que el triple de la longitud de su diámetro.

- Al dividir la longitud de la circunferencia entre el diámetro se obtiene siempre el mismo número, que se representa por la letra griega π, y se lee *pi*.
- El número siempre es el mismo valor: $\pi = \dfrac{\text{Longitud circunferencia}}{\text{Diámetro}} \approx 3{,}14$

$\dfrac{L}{d} = \pi$, de donde se obtiene la expresión de la **longitud de una circunferencia** $L = d \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot r$



1 **Comprueba la obtención de π con los siguientes ejemplos.**

	LONGITUD CIRCUNFERENCIA	DIÁMETRO	LONGITUD DIVIDIDA ENTRE DIÁMETRO
RELOJ	78,5 cm	25 cm	
ARO DE GIMNASIA	226,1 cm	72 cm	
RUEDA COCHE	168 cm	53,5 cm	
PAPELERA	157 cm	50 cm	

2 **Dibuja una circunferencia de diámetro 4 cm y calcula su longitud.**
(Utiliza el compás con un radio de 2 cm.)

3 **La rueda de una bicicleta tiene un radio de 29 cm.**

a) ¿Qué distancia recorre la bicicleta cada vez que la rueda da una vuelta?

b) ¿Y si da tres vueltas?

ÁREA Y PERÍMETRO DEL CÍRCULO

- El círculo es un polígono regular con muchos lados.

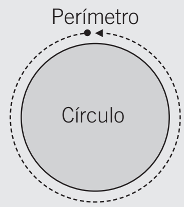
$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{El perímetro es } 2\pi r\\ \text{La apotema es el radio } r\end{array}\right\}$$

$$\textbf{Área círculo} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{\cancel{2}\pi \cdot r \cdot r}{\cancel{2}} = \pi r^2$$

El **perímetro** del círculo es igual a la longitud de la circunferencia.

$$P = 2\pi r$$



4 **Realiza un dibujo a escala y calcula el área de estos círculos.**

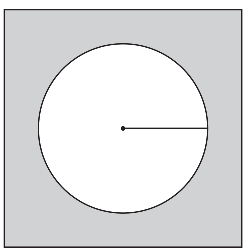
a) Radio = 3 cm

b) Radio = 5 cm

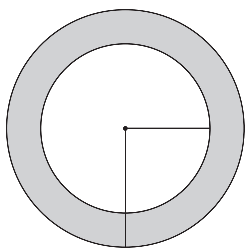
5 **Quiero sembrar un terreno circular que tiene un diámetro de 140 dm. ¿Cuántos metros cuadrados son?**

6 **Halla la superficie de las zonas sombreadas.**

a) Lado del cuadrado: 4 cm
Radio del círculo: 1,3 cm



b) Radio del círculo mayor: 5 cm
Radio del círculo menor: 3 cm



11 Cuerpos geométricos

INTRODUCCIÓN

Los poliedros, sus elementos y tipos ya son conocidos por los alumnos del curso anterior. Descubrimos y reconocemos de nuevo los prismas, las pirámides y los cuerpos de revolución, y calculamos las superficies de los principales poliedros, sin profundizar en algoritmos más difíciles (proyecciones, problemas complejos, simetrías en el espacio, etc.).

A partir del desarrollo de las figuras se intenta realizar el cálculo de las distintas áreas. No pretendemos conseguir el aprendizaje memorístico de fórmulas, sino que mediante el dibujo del poliedro «extendido» hallamos el área del rectángulo o triángulo que se forma y las superficies de las bases del poliedro, ya sean polígonos regulares o circunferencias.

Tampoco se exige a los alumnos el dibujo perfecto de las figuras; simplemente se pide, en algunas actividades, la colocación de las caras en un orden correcto desde el punto de vista gráfico.

Como complemento a la unidad se recomienda el uso de diversos materiales de Geometría, como el montaje y construcción de poliedros mediante varillas y figuras planas de unión por caras y aristas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

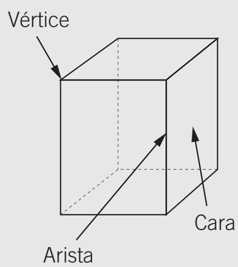
- Los *poliedros* son cuerpos geométricos limitados por caras poligonales. Las caras, aristas y vértices son los principales elementos de los poliedros.
- *Poliedros regulares* son aquellos cuyas caras están formadas por polígonos regulares.
- El tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro son los principales poliedros regulares. En ellos se cumple que la suma de caras y vértices es igual al número de aristas aumentado en 2 unidades.
- Los *prismas* son poliedros formados por dos bases iguales y paralelas, y sus caras laterales son paralelogramos. Según sea el polígono de las bases, los prismas serán triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc.
- Las *pirámides* son poliedros cuya base es un polígono regular y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común. En función de la base, las pirámides serán triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.
- El *cilindro*, el *cono* y la *esfera* son cuerpos de revolución cuyas superficies laterales son curvas.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer y diferenciar los poliedros regulares.	• Poliedros. Definición y elementos. • Poliedros regulares y características. Clasificación.	• Identificación de los principales elementos de los poliedros. • Reconocimiento de los poliedros regulares por sus elementos y desarrollo.
2. Reconocer los principales prismas y pirámides. Calcular sus áreas.	• Prismas y pirámides: elementos característicos, tipos y desarrollo. • Área de los principales prismas y pirámides.	• Reconocimiento de prismas y pirámides por sus elementos y desarrollo. • Cálculo del área total de prismas y pirámides.
3. Reconocer los cuerpos de revolución. Calcular el área del cilindro.	• Cilindro y cono: elementos característicos y desarrollo. • Área del cilindro. • La esfera terrestre: características principales.	• Desarrollo del cilindro y el cono. • Identificación de figuras con forma de cuerpos redondos. • Cálculo del área de un cilindro. • Distinción de algunos elementos de la esfera.

OBJETIVO 1

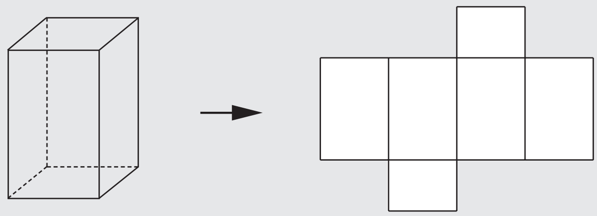
CONOCER Y DIFERENCIAR LOS POLIEDROS REGULARES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________



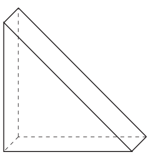
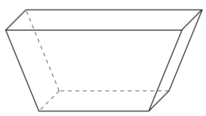
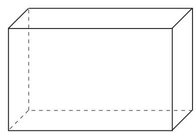
CONCEPTO DE POLIEDRO

- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos.
- Los elementos del poliedro son:
  Caras: polígonos que limitan al poliedro (6 en la figura adjunta).
  Aristas: lados comunes a dos caras (12 en la figura adjunta).
  Vértices: puntos donde se unen más de dos caras (8 en la figura adjunta).
- La superficie del poliedro se puede extender sobre un plano, y se denomina **desarrollo** plano del poliedro.

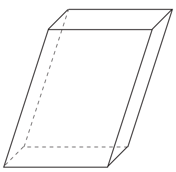
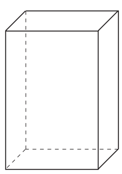
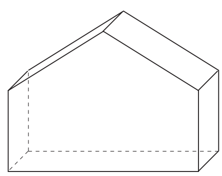


1 **Indica en los siguientes poliedros el número de caras, aristas y vértices.**

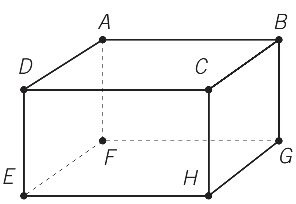
POLIEDRO	NÚMERO DE CARAS	NÚMERO DE ARISTAS	NÚMERO DE VÉRTICES	TIPOS DE POLÍGONOS DE LAS CARAS
A				
B				
C				

A

B

C


2 **En estos poliedros marca con un punto rojo los vértices y nómbralos con letras mayúsculas.**

a)

b)

c)


3 **Fíjate en el poliedro y completa.**



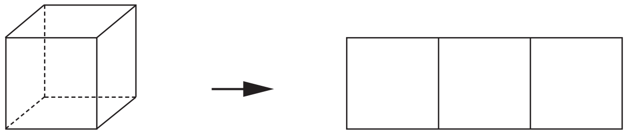
Los vértices son: A, B, ...

Las aristas son: AB, BC, ...

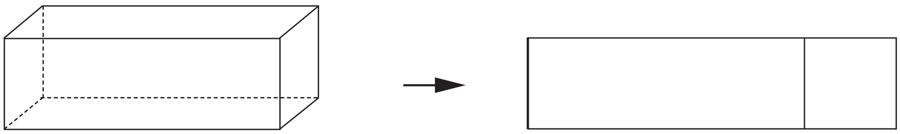
Las caras son: ABCD, ...

4 **Completa el desarrollo plano de los siguientes poliedros.**

a)

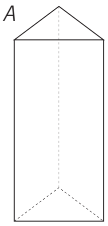


b)

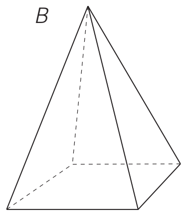


5 **Dibuja el desarrollo plano de estas figuras geométricas.**

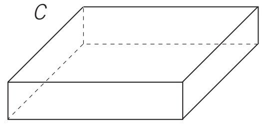
A



B

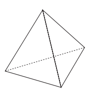
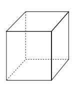
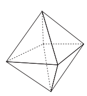
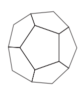
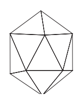
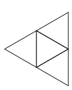
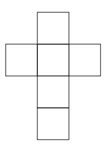
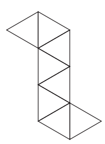
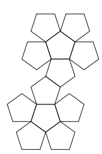
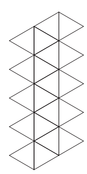


C



POLIEDROS REGULARES

- Son aquellos poliedros cuyas caras son polígonos regulares (caras y ángulos iguales). En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.
- Existen 5 poliedros regulares, que son:

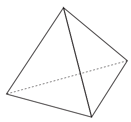
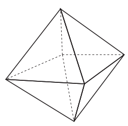
TETRAEDRO	HEXAEDRO O CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
4 caras. Triángulos equiláteros	6 caras. Cuadrados	8 caras. Triángulos equiláteros	12 caras. Pentágonos regulares	20 caras. Triángulos equiláteros
				
				

6 **Completa la siguiente tabla.**

POLIEDRO	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS	CARAS + VÉRTICES	ARISTAS + 2
Tetraedro	4	4	6	$4 + 4 = 8$	$6 + 2 = 8$
Hexaedro-cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

Observa que la suma de *Caras* + *Vértices* es igual que *Aristas* + 2.

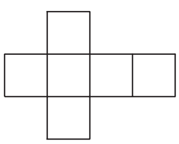
7 **Fíjate en estos poliedros. Señala y nombra sus vértices con mayúsculas y completa.**

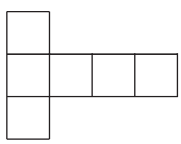
POLIEDRO	NÚMERO DE CARAS	NÚMERO DE VÉRTICES	NÚMERO DE CARAS EN CADA VÉRTICE
			
			

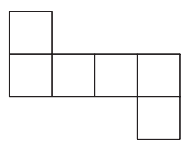
8 **Indica si son verdaderas o falsas (V o F) las siguientes afirmaciones.**

a) La suma de las caras y los vértices del cubo es 12.
b) El menor número de caras de un poliedro es 4.
c) El dodecaedro tiene 12 caras, que son triángulos equiláteros.
d) En un poliedro regular, todas las caras son iguales.
e) El número de aristas del cubo y del octaedro es el mismo.

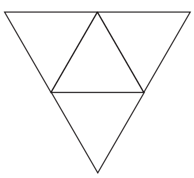
9 **Indica con qué desarrollo plano se podría construir un ....**

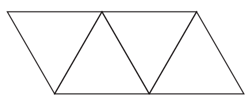
a) 

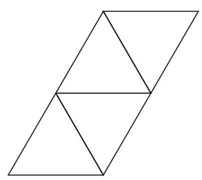
b) 

c) 

10 **Indica con qué desarrollo plano se podría construir un ....**

a) 

b) 

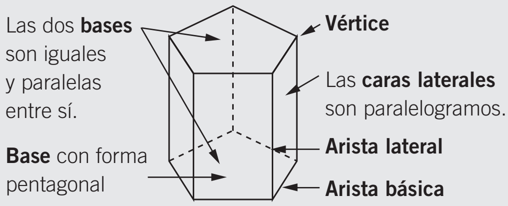
c) 

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

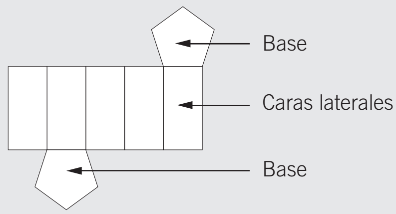
CONCEPTO DE PRISMA

Un prisma es un poliedro formado por dos bases iguales y paralelas, y cuyas caras laterales son paralelogramos.

Elementos del prisma



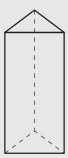
Desarrollo plano del prisma



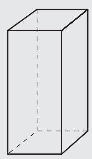
TIPOS DE PRISMAS

Los prismas se nombran según el número de lados de sus bases.

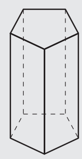
Prisma triangular



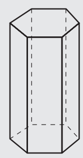
Prisma cuadrangular



Prisma pentagonal



Prisma hexagonal



1 **Nombra, en estos prismas, sus elementos: bases, vértices, caras y aristas.**

a) Prisma triangular

b) Prisma hexagonal

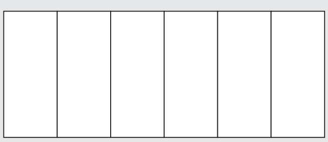
ÁREA DE UN PRISMA RECTO

A partir del desarrollo del prisma recto podemos calcular su área. Distinguimos dos partes:

Área lateral

– Es la suma de las áreas de sus caras.

– Su desarrollo es siempre un rectángulo. Uno de los lados del rectángulo coincide con el perímetro de la base, y el otro, con la altura del prisma.



$$A_L = P_B \cdot h$$

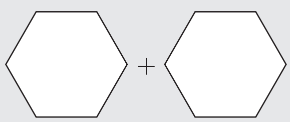
Área de las bases

– Las bases del prisma son polígonos regulares.

– El prisma tiene 2 bases iguales.

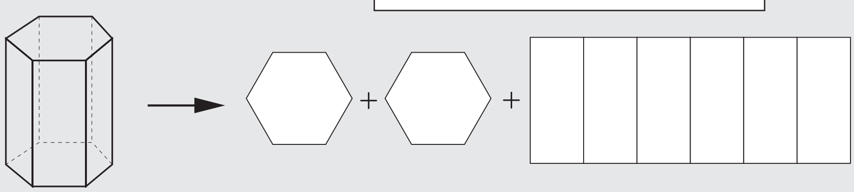
– El área de un polígono es:

$$\text{Área polígono} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$



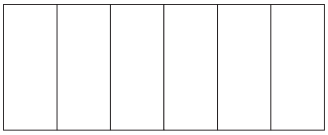
$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

Área total del prisma $\boxed{A_T = A_L + A_B + A_B = A_L + 2 \cdot A_B}$

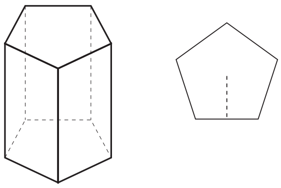


EJEMPLO

Calcula el área total de un prisma de base pentagonal, sabiendo que su altura es 7 dm, el lado de la base mide 3 dm y la apotema del polígono de las bases mide 2 dm.



$$A_{\text{Lateral}} = P_B \cdot h = (3 \cdot 5) \cdot 7 = 15 \cdot 7 = 105 \text{ dm}^2$$



$$A_{\text{Base}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{(3 \cdot 5) \cdot 2}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ dm}^2$$

$$\boxed{A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 105 \text{ dm}^2 + 2 \cdot 15 \text{ dm}^2 = 135 \text{ dm}^2}$$

2 **Halla el área total de un prisma hexagonal, sabiendo que:**

- **Su altura es 10 dm.**
- **El lado de la base hexagonal mide 4 dm.**
- **La apotema del polígono de la base mide 3,5 dm.**

Realiza a escala el dibujo del prisma y su desarrollo.

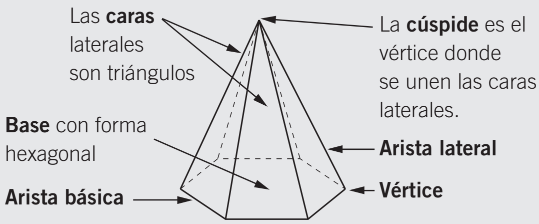
3 **Obtén el área total de un prisma cuadrangular cuya altura es de 8 dm y el lado del cuadrado de la base mide 4 dm. Realiza a escala el dibujo del prisma y su desarrollo.**

4 **Calcula el área de un cubo que tiene 7 cm de lado.**

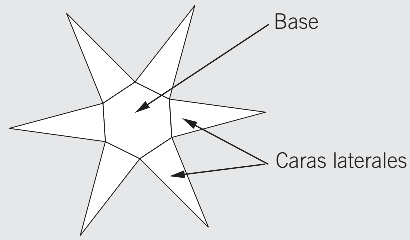
CONCEPTO DE PIRÁMIDE

Una pirámide es un poliedro cuya base es un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común, llamado vértice de la pirámide.

Elementos de la pirámide



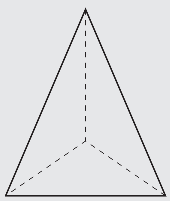
Desarrollo plano de la pirámide



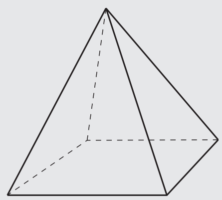
TIPOS DE PIRÁMIDES

Las pirámides se nombran según el número de lados de su base.

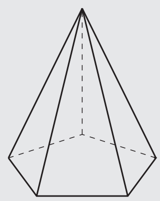
Pirámide triangular



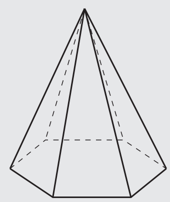
Pirámide cuadrangular



Pirámide pentagonal

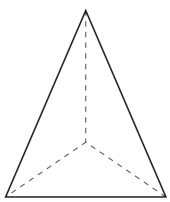


Pirámide hexagonal

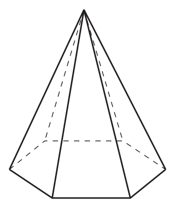


5 **Señala y nombra, en las siguientes pirámides, sus elementos: bases, vértices, caras y aristas.**

a) Pirámide triangular

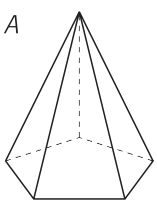


b) Pirámide hexagonal

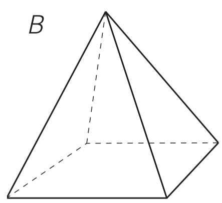


6 **Dibuja el desarrollo de las siguientes pirámides y completa la tabla.**

A



B



	NOMBRE DE LA PIRÁMIDE	POLÍGONOS DE LA BASE	NÚMERO DE CARAS	NÚMERO DE VÉRTICES	NÚMERO DE ARISTAS
A					
B					

ADAPTACIÓN CURRICULAR

ÁREA DE UNA PIRÁMIDE REGULAR

A partir del desarrollo de la pirámide recta podemos calcular su área. Distinguimos dos partes:

Área lateral

– Es la suma de las áreas de las caras.

– Sus caras son triángulos isósceles iguales, por lo que el área lateral es la suma de las áreas de los triángulos.

$$\text{Área triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\boldsymbol{A_L = n \cdot A_{\text{Triángulo}}}$$

Siendo *n* el número de triángulos de la pirámide.

Área de la base

– Es el área de un polígono regular.

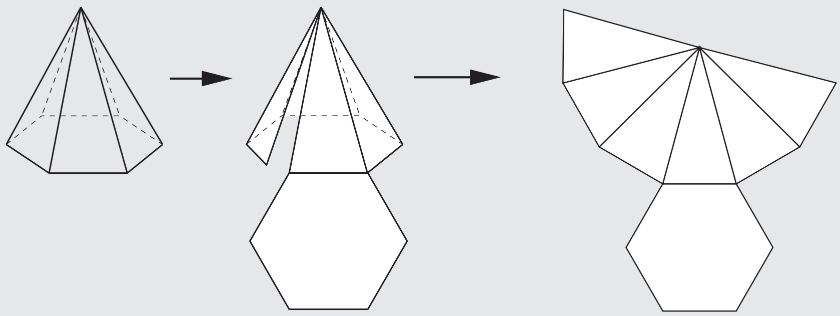
– El área de un polígono es:

$$\text{Área polígono} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$\boldsymbol{A_B = \frac{P \cdot a}{2}}$$

Área total de la pirámide:

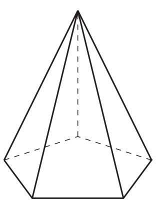
$$\boxed{\boldsymbol{A_T = A_L + A_B}}$$



EJEMPLO

Calcula el área total de una pirámide de base pentagonal, si la apotema de la base mide 4,13 cm, el lado de la base es 6 cm y la altura de cada uno de los triángulos de las caras es 9 cm.

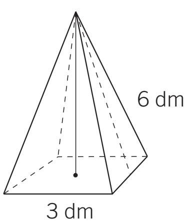
$$A_{\text{Lateral}} = 5 \cdot \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = 5 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 5 \cdot \frac{54}{2} = 135 \text{ cm}^2$$



$$\text{Área}_{\text{Polígono}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{(5 \cdot 6) \cdot 4{,}13}{2} = \frac{123{,}9}{2} = 61{,}95 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A_T = A_L + A_B = 135 \text{ cm}^2 + 75 \text{ cm}^2 = 210 \text{ cm}^2}$$

7 **Halla el área total de una pirámide de base cuadrangular, si el lado de la base mide 3 dm y la apotema de la pirámide (altura del triángulo) mide 6 dm.**



8 **Obtén el área total de una pirámide de base hexagonal, si la apotema de la base mide 5,2 dm, el lado de la base es 6 dm y la altura de cada uno de los triángulos de las caras es 10 dm. Realiza a escala el dibujo de la pirámide y su desarrollo.**

9 **Halla el área total de una pirámide de base pentagonal cuya apotema de la base mide 4 dm, la altura de cada triángulo mide 9 dm y el área de cada uno de los triángulos es 26,1 dm^2. Realiza a escala el dibujo de la pirámide y su desarrollo.**

10 **La base de una pirámide es un cuadrado de 6 cm de lado. Si la altura de cada triángulo mide 1 dm, calcula el área total de la pirámide. Realiza a escala el dibujo de la pirámide y su desarrollo.**

RECONOCER LOS CUERPOS DE REVOLUCIÓN. CALCULAR EL ÁREA DEL CILINDRO

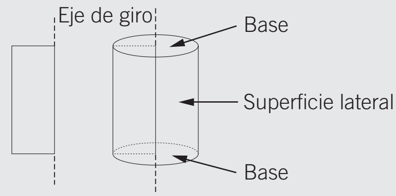
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Los cuerpos de revolución son aquellos cuyas superficies laterales son curvas.

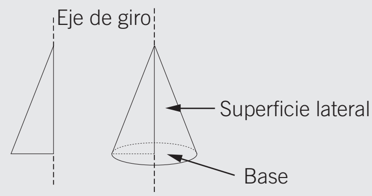
Cilindro

– Tiene 2 bases iguales que son círculos.
– Tiene 1 superficie lateral curva.
– Se obtiene al girar un rectángulo sobre un eje.

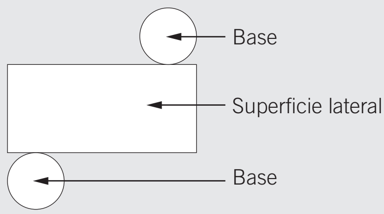


Cono

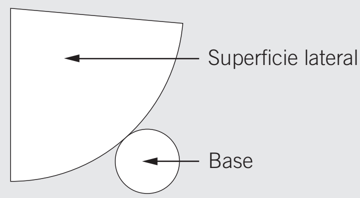
– Tiene 1 base que es un círculo.
– Tiene 1 superficie lateral curva.
– Se obtiene al girar un triángulo sobre un eje.



Desarrollo plano de un cilindro

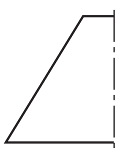


Desarrollo plano de un cono

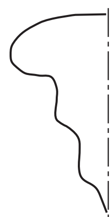


1 **Dibuja la figura que se origina al girar sobre el eje.**

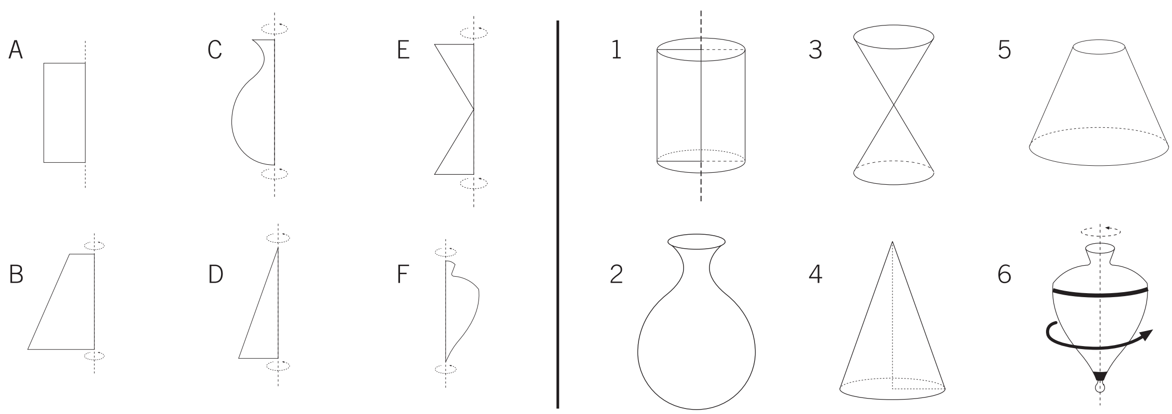
a)



b)



2 **Asocia cada figura de giro con el objeto que se origina.**



ÁREA DE UN CILINDRO

A partir del desarrollo del cilindro podemos calcular su área. Distinguimos dos partes:

Área lateral

– Es el área de un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la base, $2\pi r$, y la altura, h, es la altura del cilindro.

Área lateral = Área rectángulo = $2\pi r \cdot h$

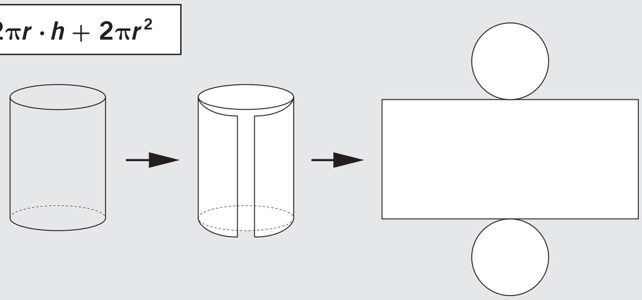
Área de las bases

– El cilindro tiene 2 bases iguales.
– Las bases del cilindro son círculos.

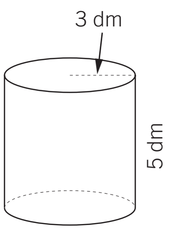
Área bases = 2 · Área círculo = $2\pi r^2$

Área total = Área lateral + Área bases = $\mathbf{2\pi r \cdot h + 2\pi r^2}$

Tomamos como valor del número $\pi = 3{,}14$.



3 **Calcula el área total del siguiente cilindro.**



Área lateral $= 2\pi r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 =$

Área bases $= 2\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 =$

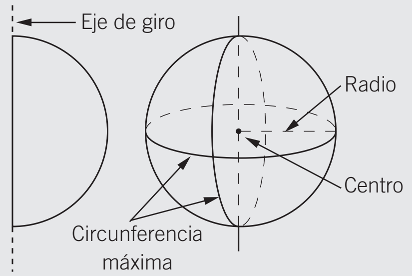
Área total =

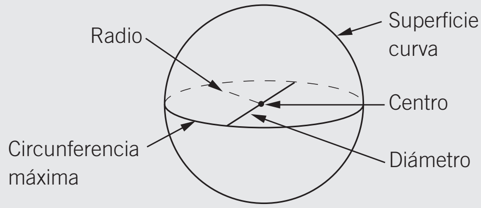
4 **Halla el área total de un cilindro que tiene un radio de la base de 4 cm y una altura de 7 cm. Realiza a escala un dibujo del cilindro y su desarrollo.**

5 **Una bobina de papel de forma cilíndrica tiene una altura de 1,5 m y un radio en la base circular de 0,4 m. Obtén el área total de la bobina.**

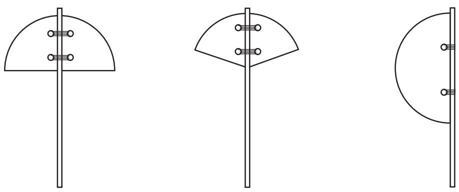
ESFERA

- La esfera es un cuerpo redondo que no tiene caras, ya que está formado por una única superficie curva. Tampoco tiene desarrollo como el cilindro y el cono.
- Se obtiene al girar un semicírculo sobre un eje que es su diámetro.





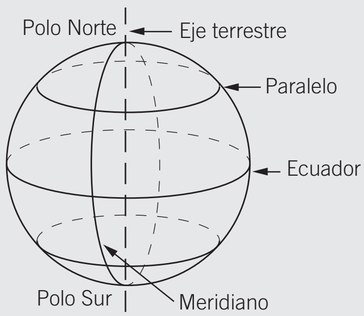
6 **¿Cuál de los siguientes objetos genera una esfera al girar en torno al eje?**



LA ESFERA TERRESTRE

La Tierra tiene forma de esfera, y presenta unos elementos imaginarios que sirven para situar puntos sobre su superficie.

Elementos de la esfera terrestre



- **Eje terrestre:** línea imaginaria alrededor de la cual gira la Tierra sobre sí misma.
- **Polos:** puntos extremos del eje terrestre, Norte y Sur.
- **Meridianos:** circunferencias máximas que pasan por los polos. El más importante es el meridiano cero. Pasa por Greenwich (Londres).
- **Ecuador:** circunferencia máxima que se obtiene si cortamos a la Tierra por su punto medio.
- **Paralelos:** circunferencias menores paralelas al ecuador.

7 **Sobre el siguiente dibujo de la esfera terrestre, señala.**

a) Los polos.

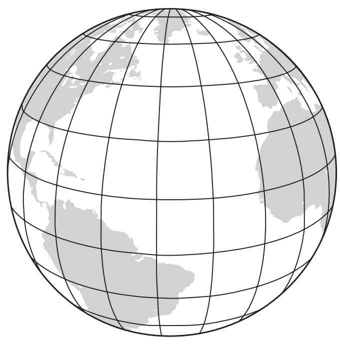
b) El eje terrestre.

c) De rojo, el meridiano cero.

d) De azul, dos meridianos.

e) De verde, el ecuador.

f) De amarillo, dos paralelos.



12 Volumen de cuerpos geométricos

INTRODUCCIÓN

Como complemento al estudio del Sistema Métrico Decimal, iniciamos esta unidad con el concepto de volumen y sus respectivas unidades de medida. De igual manera, y recordando las unidades de capacidad y masa, establecemos las relaciones entre estas unidades y las de volumen.

Partiendo del estudio de los cuerpos geométricos realizado en temas anteriores, se introduce el concepto de volumen de los diferentes poliedros como el producto del área de la base por la altura. Iniciamos este estudio con el ortoedro y el cubo (caso particular del primero), siendo suficiente para los alumnos de este nivel conocer y calcular el volumen del cilindro y la pirámide.

También en esta unidad se recomienda el uso de diversos materiales específicos en Geometría, en concreto los cuerpos geométricos transparentes, dotados de orificios para llenarlos de arena o agua y efectuar las relaciones entre volúmenes de los diferentes poliedros. Será útil la construcción del metro cúbico mediante varillas de PVC y vértices de unión, así como la manipulación del decímetro cúbico descomponible.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- El *volumen* de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.
- El *metro cúbico* (m^3) es la unidad principal de volumen. El paso de una unidad de volumen a otra se efectúa multiplicando o dividiendo por 1.000.
- El *litro* es la unidad principal de capacidad. El *kilogramo* y el *gramo* son las unidades principales de masa. Otras unidades son la tonelada y el quintal métrico.
- La conversión de estas *unidades de capacidad y masa* se efectúa multiplicando o dividiendo por 10.
- Mediante *equivalencias* establecemos relaciones entre las diferentes unidades de volumen, capacidad y masa.
- El volumen total de cuerpos geométricos, como el *ortoedro* y el *cubo*, se halla multiplicando sus tres dimensiones: largo, ancho y alto.
- De igual manera, el volumen del *cilindro* y la *pirámide* se halla multiplicando el área de las bases por su altura.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Comprender el concepto de volumen de los cuerpos.	• Concepto de volumen. • Unidades de volumen: múltiplos y submúltiplos.	• Identificación de unidades cúbicas. • Conversión de unidades de volumen aplicando las equivalencias.
2. Relacionar las unidades de volumen, capacidad y masa.	• Unidades de masa y capacidad: múltiplos y submúltiplos. • Equivalencias entre las unidades de volumen, capacidad y masa.	• Conversión de unidades de capacidad y masa mediante equivalencias. • Identificación de las relaciones entre unidades de volumen, capacidad y masa.
3. Calcular el volumen de algunos cuerpos geométricos.	• Volumen del ortoedro. • Volumen del cubo. • Volumen del cilindro y la pirámide.	• Cálculo del volumen del ortoedro y el cubo. • Cálculo del volumen del cilindro y la pirámide. • Resolución de problemas.

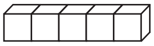
COMPRENDER EL CONCEPTO DE VOLUMEN DE LOS CUERPOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

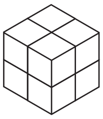
CONCEPTO DE VOLUMEN

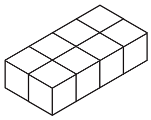
El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. Para medir el volumen de un cuerpo, lo comparamos con el volumen de otro cuerpo elegido como unidad, y determinamos el número de unidades que contiene.

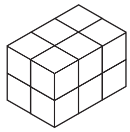
EJEMPLO

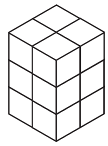
Si tomamos como unidad el cubo  (unidad cúbica), podemos afirmar que la figura  tiene como volumen 5 unidades cúbicas.

1 **Tomando como unidad el cubo , calcula el volumen de las figuras.**

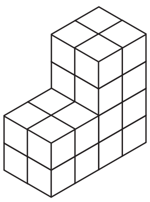
a) 

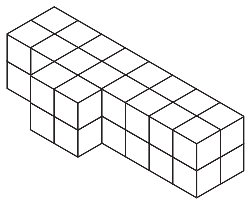
b) 

c) 

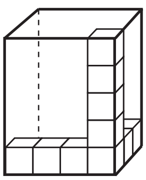
d) 

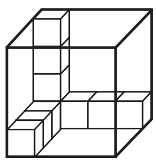
2 **Haz lo mismo que en el ejercicio anterior con estas figuras.**

a) 

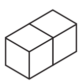
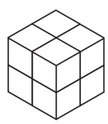
b) 

3 **Calcula los cubos que caben en cada una de las siguientes figuras.**

a) 

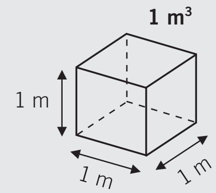
b) 

4 **Continúa y dibuja la serie de figuras en función de las unidades cúbicas que forman.**

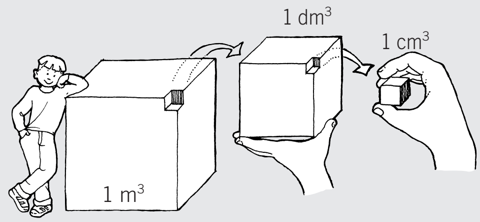
FIGURA					
N.º DE CUBOS	1	2	4	8	

UNIDADES DE VOLUMEN

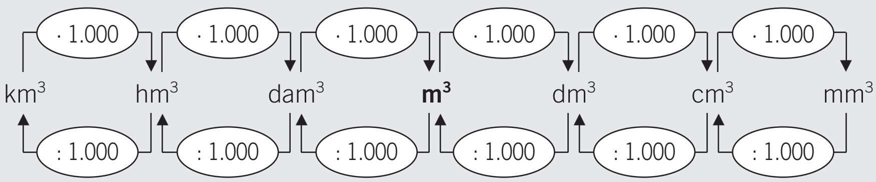
- El **metro cúbico** es la unidad principal de volumen. Se escribe **m³**. Es el volumen de un cubo que tiene 1 metro de arista.



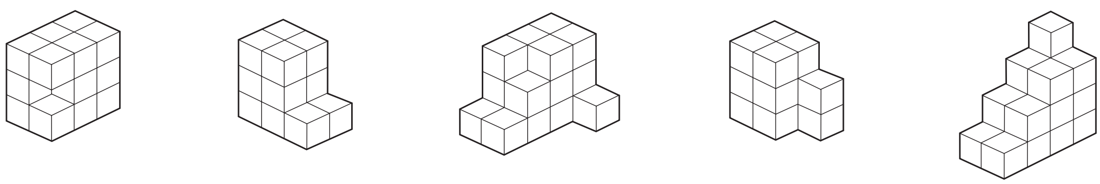
- Los **múltiplos del m³** son cubos que tienen de arista múltiplos del metro:
  – 1 decámetro cúbico (**dam³**) es un cubo que tiene 1 dam de arista.
  – 1 hectómetro cúbico (**hm³**) es un cubo que tiene 1 hm de arista.
  – 1 kilómetro cúbico (**km³**) es un cubo que tiene 1 km de arista.
- Los **submúltiplos del m³** son cubos que tienen de arista submúltiplos del metro:
  – 1 decímetro cúbico (**dm³**) es un cubo que tiene 1 dm de arista.
  – 1 centímetro cúbico (**cm³**) es un cubo que tiene 1 cm de arista.
  – 1 milímetro cúbico (**mm³**) es un cubo que tiene 1 mm de arista.



- Cada unidad es 1.000 veces mayor que la inmediata inferior y 1.000 veces menor que la inmediata superior.



5 **Si cada cubo**  **tiene un volumen de 1 cm³, calcula el volumen de las figuras.**



6 **Completa.**

a) 69 m³ = ... dm³
b) 7.209 mm³ = ... cm³
c) 1 hm³ = 1.000 ....
d) 1 dm³ = 1.000 ....
e) 53 dam³ = ... m³
f) 0,34 cm³ = ... mm³
g) 1 m³ = 1.000 ....
h) 1.000.000 mm³ = 1 ....
i) 0,38 km³ = ... hm³
j) 901 dm³ = ... m³
k) .... = 1.000.000 m³
l) 1.000 .... = ... m³

7 **Ordena, de menor a mayor (<), las siguientes unidades. Toma como referencia el metro cúbico (m³) y transforma todas las unidades de medida en esta.**

5.400 m³ – 39.291.476 mm³ – 34 m³ – 0,23 hm³ – 0,5 dam³ – 1.590 dm³ – 2,01 hm³ – 6.120.000 cm³

OBJETIVO 2

RELACIONAR LAS UNIDADES DE VOLUMEN, CAPACIDAD Y MASA

NOMBRE: ____________ CURSO: ________ FECHA: ________

UNIDADES DE CAPACIDAD

- El **litro** es la unidad principal de capacidad. Abreviadamente se escribe ℓ.
- Los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) del litro son:

MÚLTIPLOS DEL LITRO				UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL LITRO		
10.000 ℓ mirialitro mal	1.000 ℓ kilolitro kl	100 ℓ hectolitro hl	10 ℓ decalitro dal	**litro** ℓ	0,1 ℓ decilitro dl	0,01 ℓ centilitro cl	0,001 ℓ mililitro ml

UNIDADES DE MASA

- El **kilogramo** y el **gramo** son las unidades principales de masa. Abreviadamente se escriben **kg** y **g**.
- Los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) del gramo son:

MÚLTIPLOS DEL GRAMO				UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL GRAMO		
10.000 g miriagramo mag	1.000 g kilogramo kg	100 g hectogramo hg	10 g decagramo dag	**gramo** **g**	0,1 g decigramo dg	0,01 g centigramo cg	0,001 g miligramo mg

- Para medir masas de grandes objetos se utilizan estas unidades.

UNIDADES	SÍMBOLO	EQUIVALENCIA (kg)	EQUIVALENCIA (g)
Tonelada métrica	t	1.000 kg	1.000.000 g
Quintal métrico	q	100 kg	100.000 g

1 **Completa la tabla de equivalencias de valores de capacidad.**

kl	hl	dal	ℓ	dl	cl	ml
1,5						
				50		
	0,5					
						5.600
		14				

2 **Completa las siguientes tablas de equivalencias de valores de masa.**

a)

t	q	kg	g
2			
			75
	0,5		

b)

kg	g	mg
60		
	325	
		20.000

3 **Un depósito contiene 29 kl 30 hl de agua y otro depósito contiene 31 kl 450 dal. ¿Cuál de ellos contiene más litros de agua?**

4 **Observa los valores de la masa de estos vehículos. Expresa las unidades en kilogramos, y ordénalas de mayor a menor cantidad de masa.**

a) Bicicleta: 7.500 g.

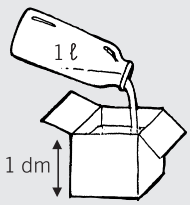
b) Coche: 1.150 kg.

c) Camioneta: 46 q.

d) Furgoneta: 2,3 t.

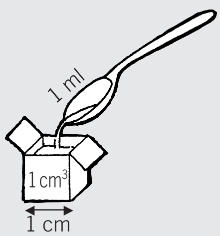
e) Camión: 25,4 t.

- Vertemos una botella de agua de 1 ℓ de capacidad en 1 dm^3, y observamos que cabe exactamente. 1 litro es el volumen de un cubo que tiene 1 dm de arista, es decir, la capacidad de 1 dm^3.



1 ℓ = 1 dm^3

- Vertemos una cucharilla de agua de 1 ml de capacidad en 1 cm^3, y observamos que cabe exactamente. 1 mililitro es el volumen de un cubo que tiene 1 cm de arista, es decir, la capacidad de 1 cm^3.



1 ml = 1 cm^3

5 **Expresa en litros.**

a) 345 dm^3 = ... ℓ

b) 200 dal = ... ℓ

c) 950 cm^3 = ... ℓ

d) 0,35 m^3 = ... ℓ

e) 23.000 cm^3 = ... ℓ

f) 0,5 dm^3 = ... ℓ

6 **Expresa en dm^3.**

a) 23 ℓ = ... dm^3

b) 20 dl = ... dm^3

c) 5 dal = ... dm^3

d) 0,35 m^3 = ... dm^3

e) 0,255 kl = ... dm^3

f) 53.780 ml = ... dm^3

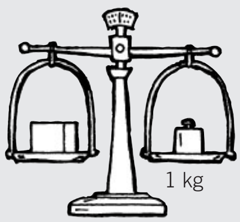
ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 **Una lata de refresco tiene una capacidad de 33 cl; una botella de aceite, una capacidad de 750 ml, y un frasco de jarabe, un volumen de 150 cm³. Ordena, de menor a mayor capacidad, los objetos anteriores.**

8 **El embalse A tiene un volumen de 0,35 hm³ y el embalse B tiene una capacidad de 129.000 kl de agua. Expresa ambas unidades en litros y compara la capacidad de los embalses.**

- Un recipiente con 1 litro de agua destilada (ocupa 1 dm³), al pesarlo en una balanza, se equilibra exactamente con una pesa de 1 kg.
  1 kilogramo es la masa que tiene 1 dm³ de agua destilada.

1 dm³ de agua destilada

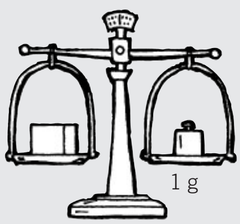


1 kg

Para el agua destilada: **1 kg = 1 ℓ**

- Un recipiente con 1 mililitro de agua destilada (ocupa 1 cm³), al pesarlo en una balanza, se equilibra exactamente con una pesa de 1 g.
  1 gramo es la masa que tiene 1 cm³ de agua destilada.

1 cm³ de agua destilada



1 g

Para el agua destilada: **1 g = 1 cm³**

Tabla resumen de equivalencias

UNIDADES DE VOLUMEN	m³	–	–	dm³	–	–	cm³
UNIDADES DE CAPACIDAD	kl	hl	dal	ℓ	dl	cl	ml
UNIDADES DE MASA	t	q	mag	kg	hg	dag	g

Para el agua destilada: **1 ℓ = 1 dm³ = 1 kg**

9 **Responde a las siguientes cuestiones.**

a) ¿Cuántas pesas de 1 kg hacen falta para equilibrar un recipiente con 3 litros de agua? ....

b) ¿Cuántas pesas de 1 g hacen falta para equilibrar un recipiente de 9 cm^3? ....

c) ¿Cuántas pesas de 1 g hacen falta para equilibrar un recipiente de 0,006 dm^3? ....

d) ¿Cuántas pesas de 1 kg hacen falta para equilibrar un recipiente de 0,2 dal? ....

10 **Expresa en kilogramos estas cantidades de agua destilada.**

a) 345 ℓ = ... kg
c) 0,5 kl = ... kg
e) 3.000 cm^3 = ... kg
b) 20 dm^3 = ... kg
d) 3,5 kl = ... kg
f) 0,5 m^3 = ... kg

11 **Expresa en gramos los siguientes volúmenes y capacidades de agua destilada.**

a) 43 ℓ = ... g
c) 0,001 kl = ... g
e) 0,25 cl = ... g
b) 7 cm^3 = ... g
d) 205 dm^3 = ... g
f) 450 ml = ... g

12 **Un depósito de agua contiene 10.000.000 de litros. Calcula.**

a) Su capacidad en m^3.

b) Su capacidad en hectolitros.

c) Si fuera agua destilada, ¿cuál sería su masa en toneladas y en kilogramos?

13 **Dos recipientes contienen una cantidad total de 15 hl de agua. Si uno de ellos contiene 72 dal, halla.**

a) La capacidad de cada recipiente en litros.

b) La masa en kilogramos de cada uno de ellos.

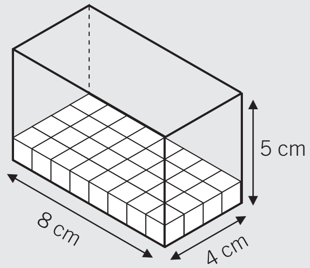
c) El volumen que ocupan en metros cúbicos.

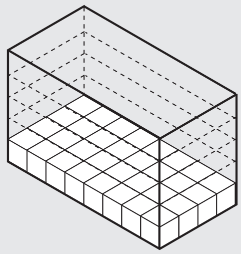
CALCULAR EL VOLUMEN DE ALGUNOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

VOLUMEN DE UN ORTOEDRO

- El ortoedro es un prisma cuyas caras son rectángulos.
- Una caja de cerillas, una caja de zapatos, una piscina, un aula, desde un punto de vista geométrico, son ortoedros.

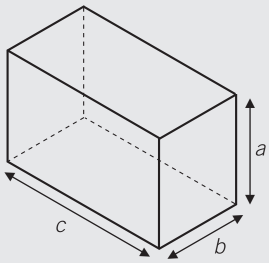




– En el fondo de la caja caben 32 cubitos de 1 cm^3 cada uno $\longrightarrow$ $8 \cdot 4 = 32$ cm^3

– Para llenar la caja hay que colocar 5 filas más de 32 cubitos de 1 cm^3 cada uno $\longrightarrow$ $(8 \cdot 4) \cdot 5 = 160$ cm^3

– El volumen de la caja es 160 cm^3, y contiene 160 cubitos de 1 cm^3 cada uno.



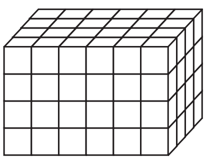
- El volumen del ortoedro es el producto del largo, el ancho y la altura.

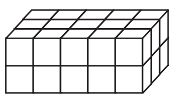
$$\boxed{V = c \cdot b \cdot a}$$

- Como el producto $c \cdot b$ es el área de la base (A_B), podemos afirmar que el volumen del ortoedro se puede expresar como el producto del área de la base por la altura (a en el dibujo y h en las fórmulas generales).

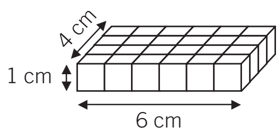
$$\boxed{V = A_B \cdot h}$$

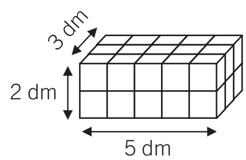
1 **Indica el volumen de los ortoedros en función del número de cubitos de 1 cm^3 que contengan.**

a) 

b) 

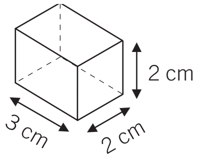
2 **Halla el volumen de los siguientes ortoedros.**

a) 

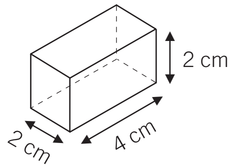
b) 

3 **Obtén el volumen de los ortoedros. Expresa los resultados en cm^3 y en dm^3.**

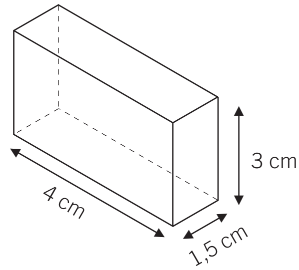
a)



b)

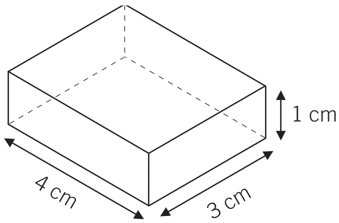


c)

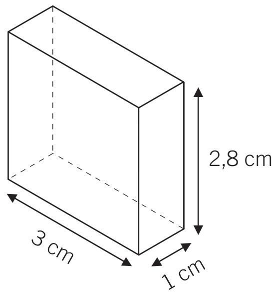


4 **Determina el volumen de los siguientes ortoedros.**

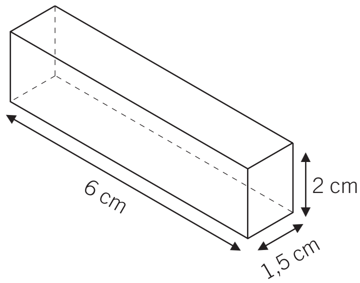
a)



b)



c)

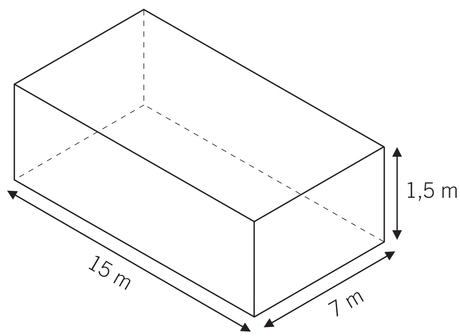


5 **Calcula el volumen de una piscina de dimensiones:**

– Largo: 15 m

– Ancho: 7 m

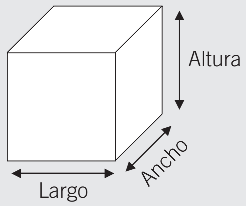
– Profundidad: 1,5 m

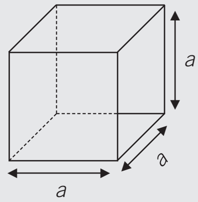


6 **Halla el volumen de un aula cuya área de la base es 40 m^2 y su altura es 2,5 m. Realiza un dibujo representativo.**

VOLUMEN DE UN CUBO

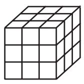
El cubo es un ortoedro que tiene iguales sus tres aristas, largo-ancho-alto.

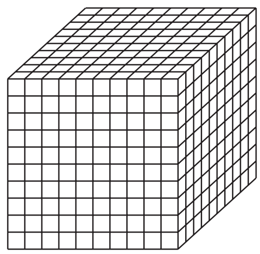




$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

7 **Indica el volumen de los cubos en función del número de cubitos de 1 cm³ que contienen.**

a) 

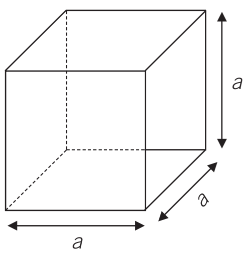
b) 

8 **Calcula el volumen de los siguientes cubos según su arista. Realiza un dibujo representativo y expresa el resultado en dm³ y m³.**

a) Arista = 5 cm

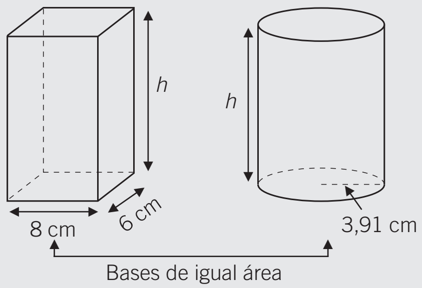
b) Arista = 70 dm

9 **Hemos construido un cubo de cartulina. Se han forrado todas las aristas con 240 cm de cinta adhesiva. ¿Cuánto mide cada arista? ¿Cuál es el volumen del cubo?**



VOLUMEN DE UN CILINDRO

- Observa los siguientes cuerpos geométricos: el ortoedro y el cilindro.
- Tienen la misma altura (h) y sus bases tienen la misma área.

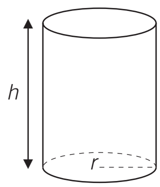


$h = 12$ cm
$A_{B\ \text{Ortoedro}} = \text{largo} \cdot \text{ancho} = 8 \cdot 6 = 48\ \text{cm}^2$
$A_{B\ \text{Cilindro}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3{,}91)^2 = 48\ \text{cm}^2$

- Si llenamos el ortoedro con arena fina o agua y lo vaciamos en el cilindro, comprobamos que este se llena.
- Ambos cuerpos tienen el mismo volumen.

$$\boldsymbol{V_{\text{Ortoedro}} = V_{\text{Cilindro}} = A_B \cdot h}$$

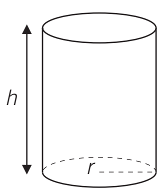
10 **Calcula el volumen de un cilindro que tiene de radio de la base 5 cm y una altura de 8 cm.**



11 **Obtén el volumen de un cilindro, si la base tiene un área de 30 cm² y mide 12 cm de altura.**

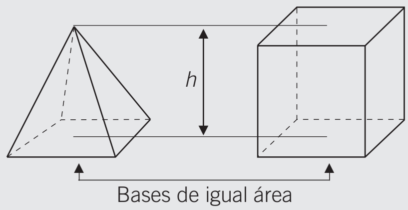
12 **Determina el volumen de un cilindro cuya base es un círculo de 8 cm de diámetro y tiene una altura de 15 cm.**

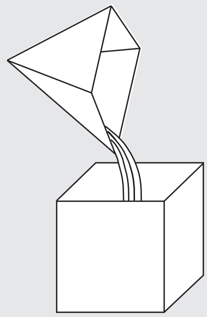
13 **Un depósito de agua tiene forma cilíndrica. El diámetro de la base es 1,8 m y su altura 4,5 m. Calcula el volumen total del depósito y la cantidad de litros que caben en él.**



VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

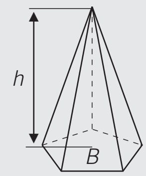
- Observa los siguientes cuerpos geométricos: el ortoedro y la pirámide.
- Tienen la misma altura *h* y la misma área de las bases.



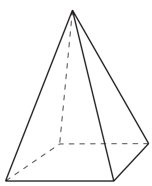


- Si llenamos la pirámide con arena fina o agua y la vaciamos en el prisma, comprobamos que para llenar el prisma se necesitaría el contenido exacto de 3 pirámides.
- El volumen de la pirámide es tres veces menor que el del prisma, es decir, un tercio del área de la base por la altura.

$$\boldsymbol{V_{\text{Pirámide}} = \frac{V_{\text{Prisma}}}{3} = \frac{A_B \cdot h}{3}}$$

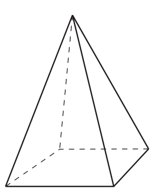


14 **Calcula el volumen de una pirámide de 12 cm de altura, si la base es un cuadrado de 4 cm de lado.**



15 **Obtén el volumen de una pirámide de 9 cm de altura cuya base es un rectángulo de 4 cm de largo y 2,5 cm de ancho.**

16 **La pirámide de Keops, en Egipto, es de base cuadrangular. El lado de la base mide 230 m y su altura 160 m. Calcula su volumen total.**



13 Funciones

INTRODUCCIÓN

Partiendo de la representación de los números enteros en la recta numérica, introducimos la representación de puntos en el plano mediante la asignación de pares de coordenadas y la construcción de sistemas de ejes cartesianos.

Es importante que los alumnos asimilen el modo ordenado de colocar los pares de números para indicar que el primero de ellos representa el valor sobre el eje horizontal (*X*), y el segundo, el valor sobre el eje vertical (*Y*), así como su expresión mediante tablas de valores y el significado gráfico en el plano.

Habiendo tratado ya la proporcionalidad numérica, continuamos en esta unidad el estudio de la relación entre dos magnitudes por medio de las funciones, los conceptos básicos del lenguaje gráfico de las expresiones algebraicas, sus elementos y significado como paso previo al análisis del mundo de la información y expresión visual.

Mediante la interpretación gráfica, los alumnos van a reconocer la función representada, las variables que intervienen, la unidad de medida elegida en cada eje y su trazado en el plano. También aprenderán a interpretar funciones que cumplen relaciones de proporcionalidad directa e inversa.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Para representar puntos en el plano utilizamos un sistema de dos rectas perpendiculares, llamado *sistema de ejes cartesianos*.
- A la recta horizontal (*X*), se le llama *eje de abscisas.*
- A la recta vertical (*Y*), se le llama *eje de ordenadas.*
- El punto donde se cruzan los ejes se llama *origen* y es el valor cero de cada eje.
- Cada punto en el plano tiene dos referencias numéricas llamadas *coordenadas* (*a*, *b*). El primer número corresponde al valor en el eje *X*, y el segundo número corresponde al valor en el eje *Y*.
- Los *pares de valores* se representan en tablas de valores y corresponden a puntos en el plano.
- Mediante una *tabla de valores* podemos relacionar cantidades de dos magnitudes y representarlas gráficamente sobre los ejes.
- Una función es la expresión algebraica que relaciona dos magnitudes. La función asocia a cada valor de una magnitud (*variable independiente*) un valor de la otra magnitud (*variable dependiente*).
- Las funciones se representan gráficamente para estudiar las características que las definen.

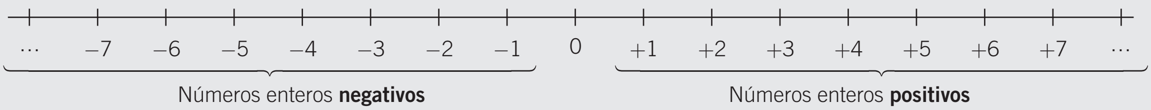
OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Representar y localizar puntos en un sistema de ejes cartesianos.	• Pares de coordenadas. • Puntos en el sistema de ejes cartesianos.	• Representación de puntos en la recta y en el plano. • Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. • Obtención de figuras simétricas respecto de los ejes.
2. Interpretar y representar tablas de valores.	• Tablas de valores. • Relación entre magnitudes. • Información de las gráficas.	• Formación de tablas de valores. • Representación en el plano de pares de valores ordenados de dos magnitudes. • Interpretación de magnitudes en el plano.
3. Interpretar gráficas. Reconocer la idea de función.	• Variable independiente y dependiente. • Concepto de función. Gráfica de una función. • Características de algunas funciones.	• Identificación de las variables: independiente y dependiente. • Representación gráfica de funciones. • Identificación de funciones de proporcionalidad directa e inversa.

REPRESENTAR Y LOCALIZAR PUNTOS EN UN SISTEMA DE EJES CARTESIANOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS EN LA RECTA NUMÉRICA

- Sobre una recta *r* señalamos el origen *O*, que es el valor cero, 0.
- A la **derecha** del cero y equidistante colocamos ordenados los números enteros **positivos**, y a la **izquierda**, colocamos los números enteros **negativos**.



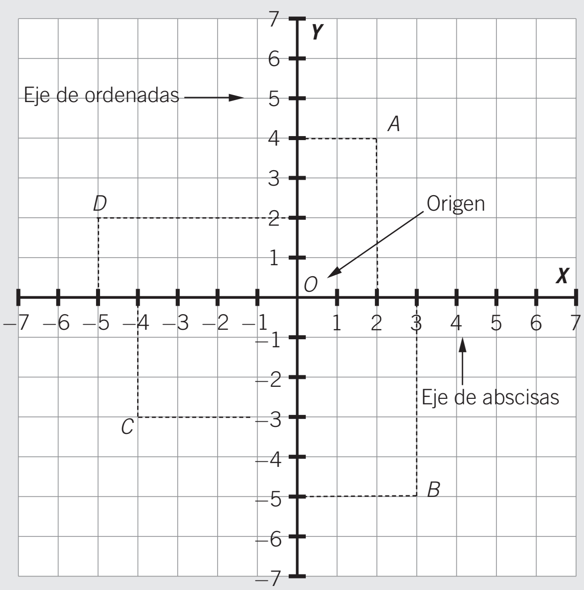
1 **Dados los números –2, +2, –5, +5, –8, +8, –10, +10:**

a) Represéntalos en la recta numérica.

b) ¿Cuál está más cerca y cuál está más lejos del origen?

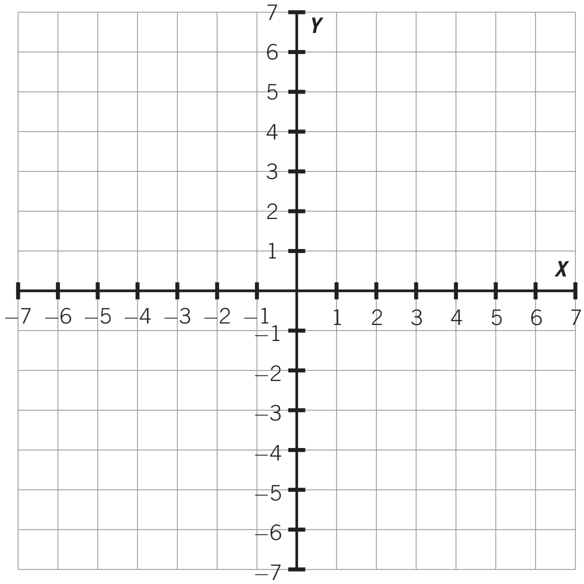
EJES CARTESIANOS EN EL PLANO

- Para representar puntos en el plano, utilizamos un sistema formado por dos rectas perpendiculares llamado **sistema de ejes cartesianos**.
  - – En la **recta *X*** o **eje de abscisas** se representan los números enteros de forma horizontal.
  - – En la **recta *Y*** o **eje de ordenadas** se representan los números enteros de forma vertical.
  - – El punto donde se cruzan se llama **origen** y es el valor cero, 0, en cada recta.
- Cada punto en el plano tiene dos referencias numéricas llamadas **coordenadas**.
  - – El primer número corresponde a la **coordenada *x***.
  - – El segundo número corresponde a la **coordenada *y***.



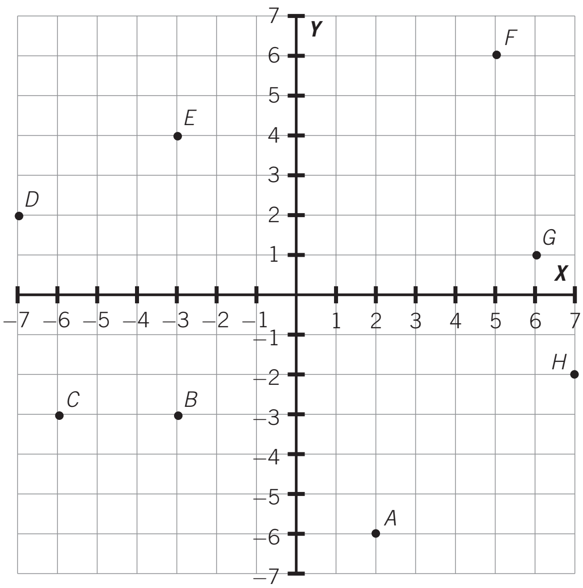
PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(+2, +4)	+2	+4
B	(+3, –5)	+3	–5
C	(–4, –3)	–4	–3
D	(–5, +2)	–5	+2

2 **Completa la tabla y representa los puntos que se indican en un sistema de ejes cartesianos.**



PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(–2, –4)		
B	(+3, +6)		
C	(+5, –3)		
D	(–1, +7)		
E	(+4, 0)		
F	(–4, 0)		

3 **Observa los puntos dele sistema de ejes cartesianos y completa la tabla.**



PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(+2, –6)		
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

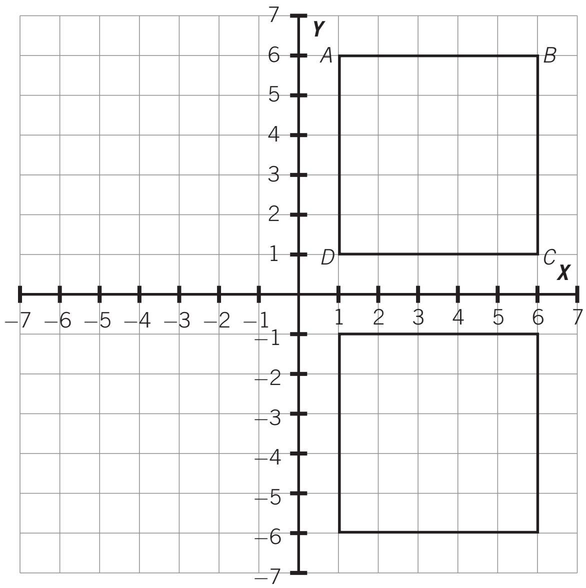
4 **Representa los siguientes puntos en un sistema de ejes cartesianos: *A* (0, +3); *B* (+2, −2); *C* (+6, −1); *D* (−4, −4); *E* (−5, 0); *F* (−3, +5).**

5 **Observa la figura adjunta.**

a) Indica las coordenadas de los vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

b) Indica las coordenadas de los vértices de la figura simétrica: *A'*, *B'*, *C'* y *D'*.

PUNTO	COORDENADAS	PUNTO	COORDENADAS
A		*A'*	
B		*B'*	
C		*C'*	
D		*D'*	



6 **Respecto al ejercicio anterior, dibuja en un sistema de ejes cartesianos las figuras simétricas que se originarían en los otros dos cuadrantes, indicando las coordenadas en el plano de sus vértices.**

INTERPRETAR Y REPRESENTAR TABLAS DE VALORES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

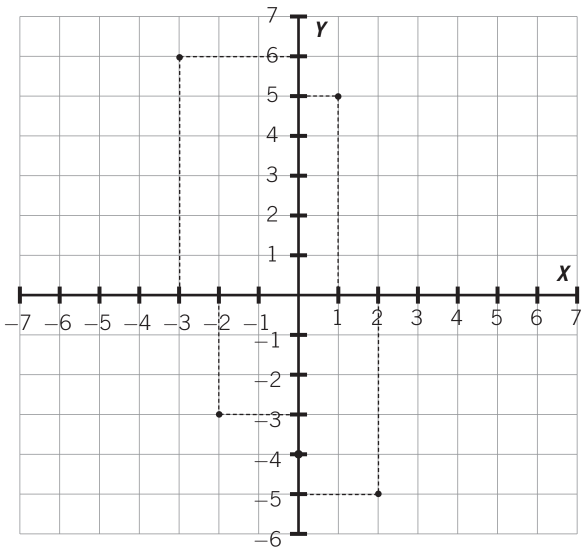
TABLAS DE VALORES Y PUNTOS EN EL EJE CARTESIANO

- Podemos expresar parejas de valores de números mediante pares de valores utilizando tablas horizontales o verticales. Cada par de valores de una tabla representa un punto del plano, y viceversa.
- A cada punto del plano le corresponde un par de valores ordenados:
  a) La primera fila o columna corresponde al valor numérico del eje horizontal, *X*.
  b) La segunda fila o columna corresponde al valor numérico del eje vertical, *Y*.

EJEMPLO

Forma la tabla y representa los pares de valores.
(−2, −3), (2, −5), (−3, 6), (1, 5), (0, −4)

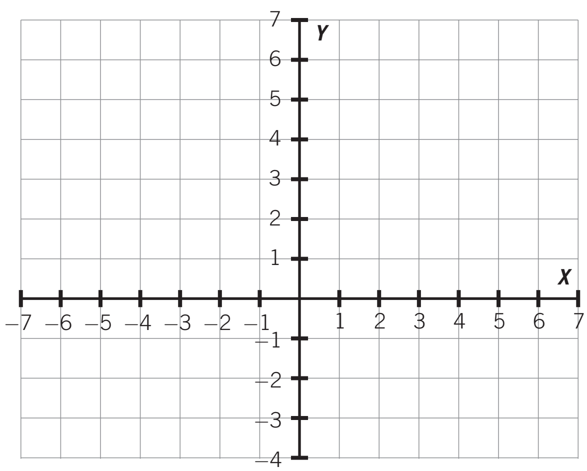
EJE *X*	EJE *Y*
−2	−3
2	−5
−3	6
1	5
0	−4



1 **Forma los pares de valores que se indican en la tabla y represéntalos en un sistema de ejes cartesianos.**

Pares de valores: ....

EJE *X*	EJE *Y*
4	7
2	−1
−1	6
4	0
−1	−3
−2	5



ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 **Forma la tabla de valores de los siguientes pares ordenados y represéntalos en un sistema de ejes cartesianos.**

(0, –4), (–5, 5), (2, –2), (–3, 6), (7, 0), (–4, 0), (6, 6)

Mediante una **tabla** podemos relacionar cantidades de dos magnitudes.

EJEMPLO

Un saco de azúcar pesa 2 kilogramos, 2 sacos de azúcar pesan 4 kilogramos, 3 sacos de azúcar pesan 6 kilogramos...

Formamos la tabla de valores con las dos magnitudes.

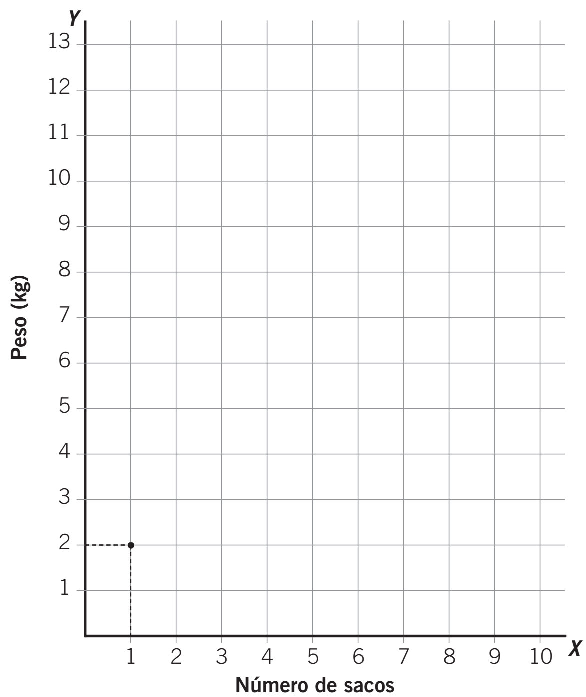
N.º DE SACOS	1	2	3	4	5	6	…
PESO (kg)	2	4	6	8	10	12	…

También podemos reflejar esta información en un sistema de ejes.

3 **Representa en el sistema de ejes los valores del ejemplo anterior.**

– En el eje *X* se representan los valores de la magnitud *número de sacos*.

– En el eje *Y* se representan los valores de la magnitud *peso* (en kg).



4 **Las alturas (en cm) de un grupo de alumnos son Antonio: 150 cm, Ana: 160 cm, Juan: 170 cm, María: 140 cm, Pedro: 120 cm, Eva: 130 cm y Elena: 160 cm. Forma una tabla con los pares de valores y represéntalos en un sistema de ejes.** ***(Inicia los valores de altura en 100 y luego auméntalo de 10 en 10.)***

a) ¿Qué alumno es el más alto?

b) ¿Qué alumno es el más bajo?

c) ¿Hay alumnos con la misma altura.

Las **gráficas** nos pueden proporcionar informaciones acerca de las magnitudes y sus valores en el plano.

5 **Las temperaturas medias (en °C) de los meses del año han sido: enero: 6 °C, febrero: 8 °C, marzo: 10 °C, abril: 16 °C, mayo: 18 °C, junio: 22 °C, julio: 30 °C, agosto: 36 °C, septiembre: 26 °C, octubre: 16 °C, noviembre: 12 °C y diciembre: 8 °C.**

a) Forma una tabla de valores con las magnitudes correspondientes.

b) Representa los pares de valores en un sistema de ejes cartesianos.

c) Realiza una interpretación de los datos: mes más frío, mes más cálido, meses con igual temperatura, diferencias de temperatura más acusadas entre meses, etc.

13 OBJETIVO 3
INTERPRETAR GRÁFICAS. RECONOCER LA IDEA DE FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

VARIABLES Y GRÁFICAS

- En las tablas de valores se relacionan dos magnitudes.Dichas magnitudes se llaman **variables**, porque toman distintos valores, es decir, varían.
- En los pares de valores (*a*, *b*), (*c*, *d*), (*e*, *f*) y (*g*, *h*), el segundo valor depende del primero:
  – *a*, *c*, *e*, *g* son la **variable independiente**; su valor se fija previamente y se designan con la letra *x*.
  – *b*, *d*, *f*, *h* son la **variable dependiente**; su valor depende del valor de *x* y se designan con la letra *y*.
- Si representamos los valores en un sistema de ejes y unimos sus puntos, obtenemos una **gráfica**:
  – La variable independiente (*x*) se sitúa en el eje de abscisas u horizontal.
  – La variable dependiente (*y*) se sitúa en el eje de ordenadas o vertical.

x	***y***
a	*b*
c	*d*
e	*f*
g	*h*

EJEMPLO

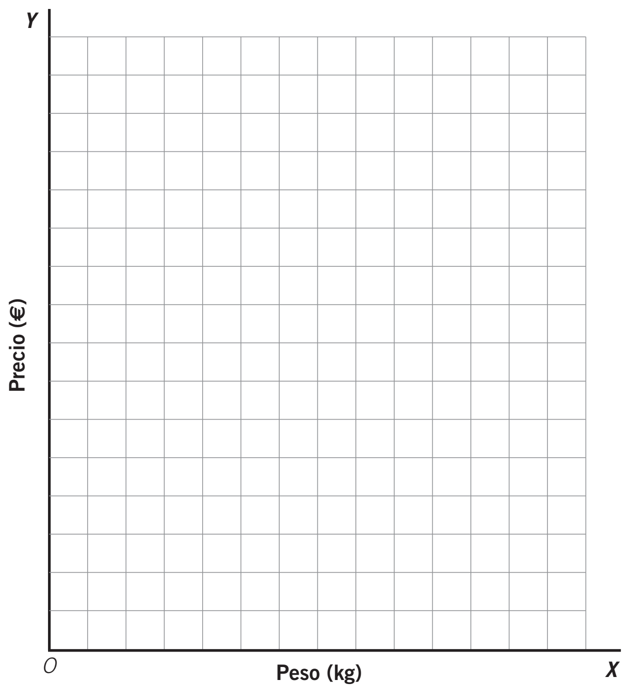
Un kilo de fresas cuesta 3 €.

a) Magnitudes: *peso* (kg) y *precio* (€).
b) Variable independiente: peso (kg) (se fija previamente).
c) Variable dependiente: precio (€) (depende del número de kilos).
d) Tabla de valores:

PESO (kg)	1	2	3	4	5
PRECIO (€)	3	6	9	12	15

1 **Respecto al ejemplo anterior:**

a) Representa los pares de valores en el sistema de ejes adjunto.
b) Une los puntos. ¿Qué obtienes?

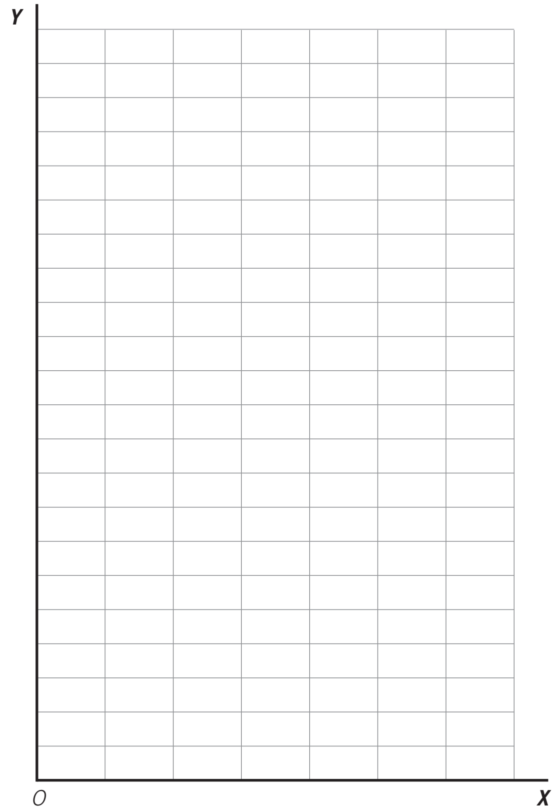


2 **En una tienda 1 metro de tela cuesta 4 €. ¿Cuánto costarán 2, 3, 4, 5 y 6 metros de tela?**

a) Forma la tabla de valores con las magnitudes que intervienen.

b) Indica la variable independiente y la dependiente.

c) Representa los valores en un sistema de ejes y traza la gráfica correspondiente.



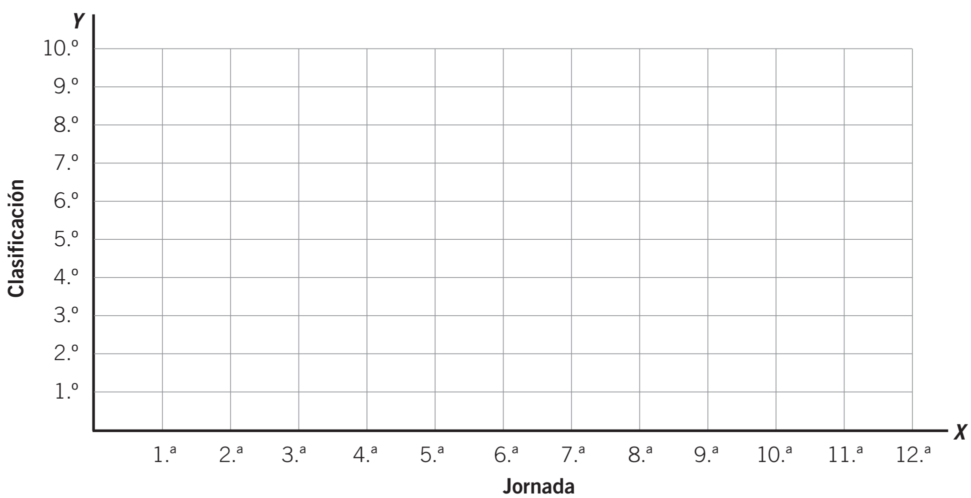
3 **La clasificación de un equipo en un campeonato de fútbol ha sido:**

JORNADA (valor *x*)	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª
PUESTO (valor *y*)	4.º	5.º	3.º	7.º	8.º	5.º	9.º	10.º	8.º	6.º	4.º	2.º

a) Representa los valores en un sistema de ejes.

b) ¿Cuál fue la jornada con mejor clasificación?

c) ¿Y la jornada con peor clasificación?



4 **La temperatura media durante el año pasado en un lugar viene determinada por la siguiente tabla de valores.**

MES	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sep.	Octubre	Nov.	Dic.
TEMPERATURA (°C)	4	8	12	18	22	26	32	34	26	14	10	2

a) Representa los valores en un sistema de ejes y traza la gráfica correspondiente.

b) Indica las variables dependiente e independiente.

c) ¿Cuál fue el mes con menor temperatura media?

d) ¿Y el mes con mayor temperatura?

CONCEPTO DE FUNCIÓN

- En los ejercicios anteriores, los valores obtenidos en cada puesto de clasificación del equipo de fútbol y en cada temperatura media están en función de los valores de cada jornada jugada y de cada mes del año.
- El valor de *y* está en función del valor que toma *x*. La relación entre dos magnitudes la podemos escribir con una expresión algebraica, es decir, combinando letras, números y signos aritméticos.
- A cada valor de la variable independiente (x) le corresponde un único valor de la variable dependiente (y).
- Así, en la expresión algebraica $3x + 1$, cada vez que se asignen valores numéricos a la variable x se obtendrán otros valores numéricos que están en función de ellos: multiplicamos por tres y sumamos uno.

En $3x + 1$:

VALOR DE *x*	VALOR OBTENIDO
0	$3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$
1	$3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
2	$3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$
−1	$3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$
−2	$3 \cdot (-2) + 1 = -6 + 1 = -5$

→

Se expresa: $y = 3x + 1$

x (valor)	*y* (valor)
0	1
1	4
2	7
−1	−2
−2	−5

5 **Elabora la tabla de valores de cada una de las siguientes funciones.**

a) $y = x + 2$

x	y
0	
1	3
–1	
2	
–2	

Ejemplo: $x = 1$
$y = 1 + 2 = 3$

c) $y = 2x - 1$

x	y
0	
–1	–3

Ejemplo: $x = -1$
$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$

e) $y = 2x + 1$

x	y
1	3

Ejemplo: $x = 1$
$y = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

b) $y = -3x$

x	y

d) $y = 2 - x$

x	y

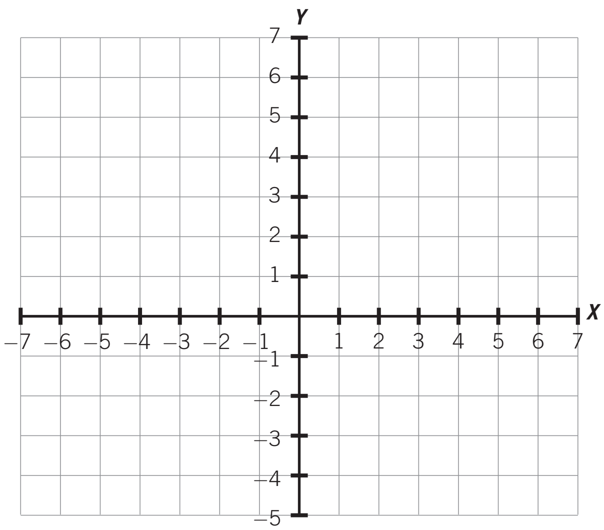
f) $y = x - 5$

x	y

6 **Representa gráficamente las funciones: calcula los pares de valores mediante una tabla y une los puntos obtenidos en los sistemas de ejes cartesianos.**

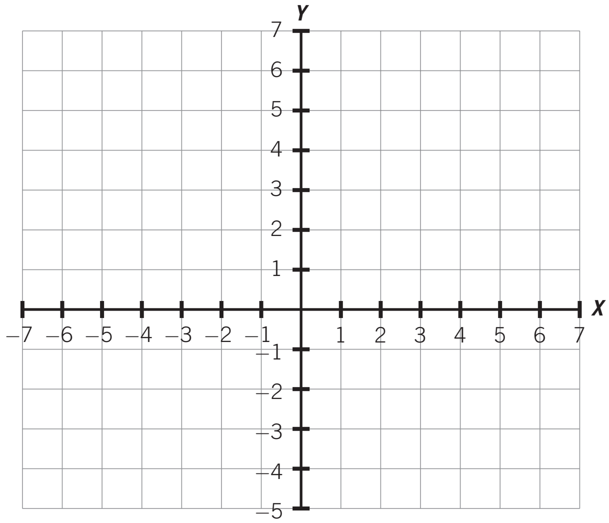
a) $y = x - 1$

x	y
0	
1	
–1	
2	
2	



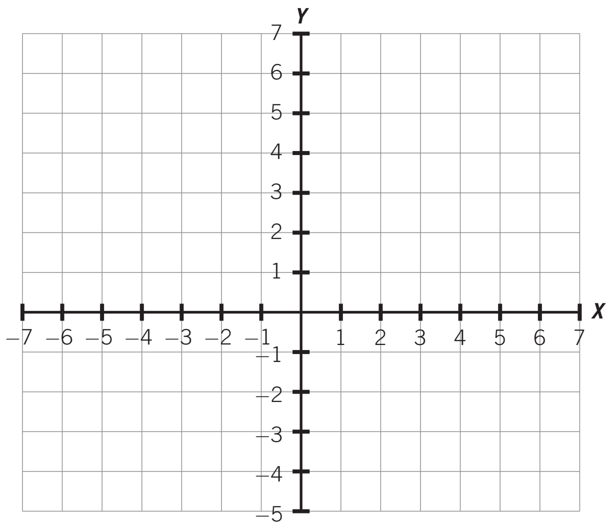
b) $y = 2x - 2$

x	y



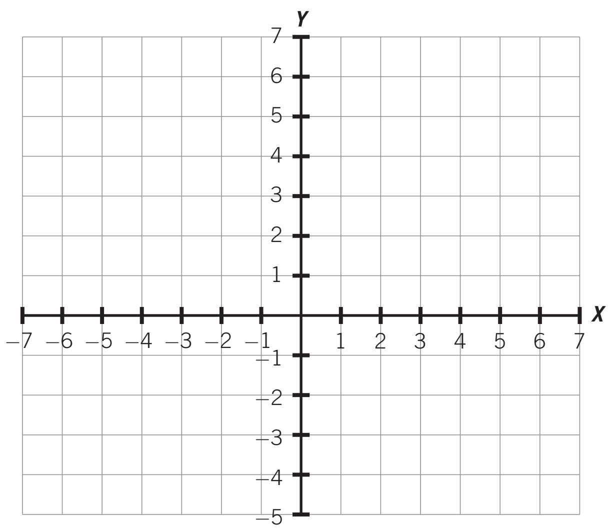
c) $y = 2x + 2$

x	y



d) $y = -3x + 5$

x	y



CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

Cuando representamos funciones mediante gráficas podemos observar las siguientes características.

- Pueden ser **crecientes**: si al aumentar la variable independiente también aumenta la variable dependiente, la gráfica crece.
- Pueden ser **decrecientes**: si al aumentar la variable independiente, disminuye la variable dependiente, la gráfica decrece.
- La gráfica de **funciones de proporcionalidad directa**, que relaciona dos magnitudes directamente proporcionales, es una línea recta que pasa por el origen, es decir, por el punto (0, 0).
- La gráfica de **funciones de proporcionalidad inversa**, que relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales, es una línea curva que no pasa por el origen.

7 **Un kilogramo de pescado cuesta 2 €, y su función viene definida por la expresión $y = 2x$.**

a) Elabora una tabla de valores para el precio de 2, 3, 4, 5 y 6 kg de pescado.

b) Representa los valores en un sistema de ejes y dibuja la gráfica obtenida.

c) Describe alguna característica de la gráfica.

8 **Un camión recorre una distancia de 120 km, de modo que si aumenta la velocidad, hasta un límite de 80 km/h, tardará menos tiempo en recorrer dicha distancia.**
La función que relaciona el tiempo que tarda (y) con la velocidad (x) viene definida por la expresión $y = \frac{120}{x}$.

a) Elabora una tabla de valores para estas velocidades (en km/h): 40, 65, 70 y 80.

b) Representa los valores en un sistema de ejes y dibuja la gráfica obtenida.

c) Describe alguna característica de la gráfica.

9 **Un rectángulo tiene de base 5 m y altura *x*.**

a) La expresión de la función que expresa el área del rectángulo es: ....

b) Elabora una tabla de valores para estas alturas (en m): 2, 3, 4, 5 y 6.

c) Representa los valores en un sistema de ejes y une los puntos.

d) Describe alguna característica de la gráfica.

10 **La siguiente tabla de valores muestra la evolución de la temperatura de un vaso de leche a medida que pasa el tiempo.**

TIEMPO (min)	TEMPERATURA (°C)
0	90
3	80
6	70
9	60
12	50
15	40
18	

a) Representa la función en un sistema de ejes.

b) Halla el valor de la temperatura a los 18 minutos.

c) Describe alguna característica de la función.

14 Estadística

INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta unidad es acercar a los alumnos a las interpretaciones de datos que ellos mismos pueden elaborar mediante encuestas y preguntas sencillas, dirigidas principalmente a sus compañeros. Planteamos actividades ya estructuradas y descritas, pero es aconsejable exponer a los alumnos situaciones semejantes para hacerlos partícipes del proceso completo: desde el recuento de datos, agrupación, elaboración de tablas y gráficos, cálculo de las principales medidas de centralización, hasta la interpretación final.

Recomendamos el uso de recursos próximos a la realidad de los conceptos tratados: desde recortes de prensa con gráficos estadísticos sencillos (población, ventas…) o materiales de probabilidad: cubiletes, dados, cartas, bolas, pirindolas, etc.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Mediante la *Estadística*, recopilamos, agrupamos e interpretamos el significado de una serie de datos relativos a un suceso.
- Los datos estadísticos se agrupan en tablas, donde se reflejan las *frecuencias* con que aparecen.
- *Frecuencia absoluta* de un dato es el número de veces que se repite. La suma de todas las frecuencias absolutas es el número total de datos.
- *Frecuencia relativa* de un dato es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos. La suma de todas las frecuencias relativas es 1.
- Los datos estadísticos se representan gráficamente, siendo los gráficos más usuales el *diagrama de barras*, el *polígono de frecuencias* y el *diagrama de sectores*.
- De una serie de datos se calculan *medidas estadísticas* que ayudan a interpretarlos. Las principales son la *media*, la *mediana* y la *moda*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Interpretar y elaborar tablas de frecuencias.	• Datos estadísticos. • Tablas de frecuencias. Frecuencia absoluta y relativa.	• Recuento de datos estadísticos. • Formación de tablas de frecuencias.
2. Elaborar gráficos para representar un conjunto de datos.	• Gráficos estadísticos: diagrama de barras, polígono de frecuencias y diagrama de sectores.	• Construcción de gráficos a partir de tablas de frecuencias. • Interpretación de gráficos.
3. Calcular las principales medidas de centralización.	• Media, mediana y moda de un conjunto de datos.	• Obtención de las medidas estadísticas a partir de una serie de datos. • Resolución de problemas.

INTERPRETAR Y ELABORAR TABLAS DE FRECUENCIAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Cuando recogemos una serie de datos o anotamos las respuestas de una pregunta, escribimos esos datos en tablas para analizarlos, organizarlos y emitir una serie de opiniones y conclusiones. Esos datos se llaman **datos estadísticos**, y la ciencia que se ocupa de realizar estas investigaciones es la **Estadística**.

EJEMPLO

En una clase de 24 alumnos de 2.º ESO las calificaciones obtenidas en el examen de Lengua han sido: 4, 6, 7, 3, 6, 8, 5, 9, 2, 7, 5, 8, 7, 5, 4, 7, 8, 4, 6, 5, 8, 7, 3 y 10.

NOTAS	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
2	I	1	1/24
3	II	2	2/24
4	III	3	3/24
5	IIII	4	4/24
6	III	3	3/24
7	~~IIII~~	5	5/24
8	IIII	4	4/24
9	I	1	1/24
10	I	1	1/24
		24	**24/24 = 1**

Frecuencia absoluta

Es el número de veces que se repite el dato.

Frecuencia relativa

Es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos, e indica la relación del dato con respecto al total de datos.

- La suma de frecuencias absolutas es el número total de datos: $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 4 + 1 + 1 = 24$
- La suma de las frecuencias relativas es la unidad.

$$\frac{1}{24} + \frac{2}{24} + \frac{3}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24} + \frac{5}{24} + \frac{4}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

1 **Se ha preguntado a 50 alumnos del primer ciclo de ESO la edad (en años) que tienen, y se han obtenido los siguientes datos: 12, 13, 12, 14, 13, 15, 13, 12, 14, 15, 13, 12, 14, 15, 13, 12, 16, 14, 15, 13, 14, 15, 12, 16, 12, 14, 15, 13, 12, 13, 15, 16, 14, 15, 13, 14, 15, 15, 13, 14, 15, 12, 16, 12, 13, 12, 14, 15, 13 y 12. Completa la tabla.**

a) Suma todas las frecuencias absolutas.

b) Suma todas las frecuencias relativas.

c) ¿Cuál es la edad que más se repite?

d) ¿Cuál es la edad que menos se repite?

EDADES	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
12			
13			
14			
15			
16			
	Total		

2 **Las temperaturas medias diarias (en °C) durante el mes de diciembre han sido:**

+11, −2, +8, +2, −1, +6, +8, +4, +8, +9, +2, +6, +2, +4, +8, −1,
+9, +6, +9, +6, +8, +4, +8, −2, +4, −1, −2, +1, +6, +2, +8

Completa la siguiente tabla.

TEMPERATURA (°C)	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
−1			
−2			
+1			
	Total		

3 **Se ha lanzado un dado de parchís 40 veces, y se han obtenido estos resultados.**

6, 1, 5, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 4, 6, 4, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 4, 6,
1, 4, 3, 5, 2, 1, 2, 4, 6, 3, 5, 4, 1, 2, 3, 5, 4, 6, 2, 3

a) Forma una tabla de datos con el recuento, y halla la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y los totales.

b) ¿Cuál es valor que más veces ha salido?

4 **Andrés ha recogido los siguientes datos, referidos al número de hermanos que tienen sus compañeros de clase.**

4, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 1, 0, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 6, 5, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 4

a) Forma una tabla de datos con el recuento, la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y los totales.

b) ¿Cuál es el valor que más se repite?

En ocasiones, los datos que recogemos no son numéricos, sino que responden a **valores cualitativos**, es decir, a características o valores que no son números, sino cualidades.

5 **Natalia ha preguntado en los cursos de 2.º ESO A, B y C sobre el tipo de música que prefieren sus compañeros. Los datos los ha reflejado en la siguiente tabla. Completa los valores que faltan.**

TIPO DE MÚSICA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Rock	16	
Pop		$\frac{21}{75}$
Bakalao		
Tecno	18	
Melódica		$\frac{9}{75}$
Total	**75**	

6 **Se ha realizado una encuesta a los 44 alumnos de 2.º ESO A y B sobre la estación del año en la que han nacido.**

Asignamos a la primavera la letra P, al verano V, al otoño O y al invierno I, y se anotan los siguientes resultados.

P, I, V, I, O, P, V, O, V, O, I, V, I, O, P, V, O, V, O, I, V, P,
V, O, O, I, P, P, V, V, O, I, P, V, O, I, I, P, V, O, V, O, I, P

Completa la tabla.

ESTACIÓN	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Primavera - P			
Verano - V			
Otoño - O			
Invierno - I			
Total			

ELABORAR GRÁFICOS PARA REPRESENTAR UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Los datos estadísticos se representan mediante **gráficos**, que nos ayudan a visualizar e interpretar la información recogida. Los gráficos más importantes son: el diagrama de barras, el polígono de frecuencias y el diagrama de sectores.

DIAGRAMA DE BARRAS

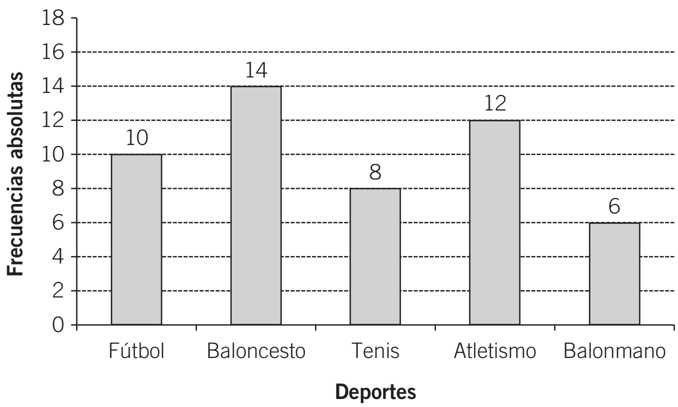
- Para hacerlo utilizamos un sistema de ejes. En el eje horizontal representamos los datos, y en el vertical, las frecuencias absolutas.
- La frecuencia que corresponde a cada dato se representa por una barra. En ocasiones se puede mostrar la frecuencia sobre la barra.

EJEMPLO

En el curso de 2.º ESO los deportes favoritos de los alumnos son:

DEPORTES	Fútbol	Baloncesto	Tenis	Atletismo	Balonmano
FRECUENCIA	10	14	8	12	6

Deportes favoritos 2.º ESO



1 **Entre los alumnos de 2.º ESO se ha realizado una encuesta sobre el tipo de programas de televisión preferido, y se han obtenido los resultados de la tabla. Represéntalos en un diagrama de barras.**

PROGRAMA TV	Deportivos	Musicales	Culturales	Películas	Concursos
FRECUENCIA ABSOLUTA	16	10	4	8	12

2 **Las edades (en años) de 24 alumnos de ESO que participan en competiciones deportivas son:**

16, 14, 15, 13, 14, 15, 12, 16, 12, 13, 12, 14, 13, 15, 13,
12, 14, 15, 13, 12, 14, 15, 13, 12

a) Forma una tabla de frecuencias.

b) Represента los datos en un diagrama de barras.

3 **En una clase de 25 alumnos se ha realizado una encuesta para conocer el número de hermanos que tienen. Los resultados han sido:**

0, 1, 3, 4, 2, 2, 1, 4, 5, 2, 0, 1, 1, 3, 2, 2, 4, 3, 2, 6, 0, 1, 2, 3, 2

a) Forma una tabla de frecuencias.

b) Representa los datos en un diagrama de barras.

4 **Se ha lanzado 100 veces un dado de parchís. Los resultados obtenidos en los lanzamientos vienen indicados en la tabla. Represéntalos en un diagrama de barras.**

CARAS	FRECUENCIA ABSOLUTA
1	12
2	14
3	16
4	18
5	20
6	20
Total	**100**

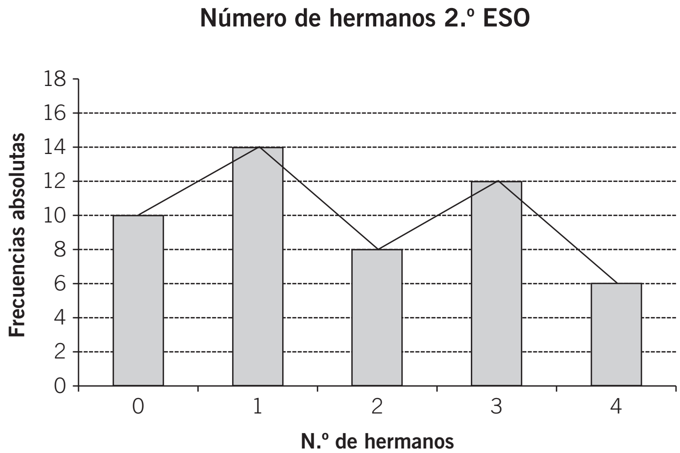
POLÍGONO DE FRECUENCIAS

- Se elabora a partir del diagrama de barras.
- Formamos un diagrama de barras, unimos los extremos superiores de las barras y obtenemos una línea poligonal llamada polígono de frecuencias.

EJEMPLO

En 2.º ESO el número de hermanos de los alumnos es:

N.º HERMANOS	FRECUENCIA
0	10
1	14
2	8
3	12
4	6



5 **Las calificaciones en Matemáticas de los alumnos de una clase han sido:**

CALIFICACIÓN	FRECUENCIA
Insuficiente	6
Suficiente	8
Bien	5
Notable	3
Sobresaliente	2

Representa los datos mediante un polígono de frecuencias.

6 **Las ventas de un concesionario de coches en el último mes son:**

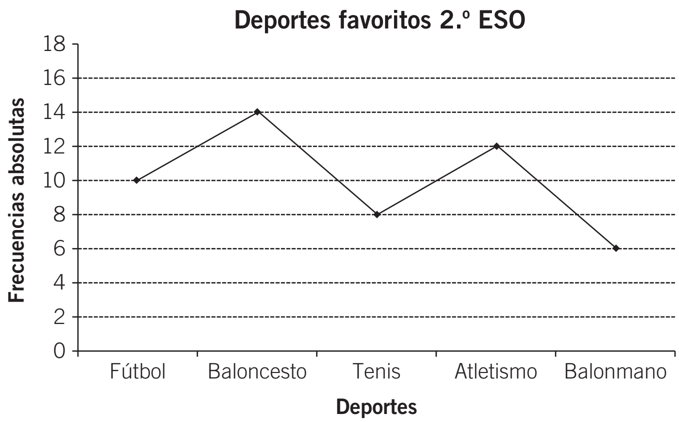
TURISMOS	DEPORTIVOS	TODOTERRENOS	FAMILIARES	INDUSTRIALES	OTROS MODELOS
60	8	10	35	40	4

Representa los datos mediante un polígono de frecuencias.

Si eliminamos las barras del polígono, obtenemos un **gráfico de líneas**, en el que se resaltan las frecuencias con un punto grueso.

EJEMPLO

En el ejemplo anterior, el gráfico quedaría así:



7 **Carmen y Eva han anotado las temperaturas medias (en °C) registradas en el colegio durante todo el curso escolar. Han obtenido los siguientes resultados.**

SEP.	OCTUBRE	NOV.	DIC.	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO
20	14	12	10	8	10	14	18	20	24

Realiza un gráfico de líneas correspondiente a los datos de la tabla.

8 **Los puestos en la tabla de clasificación de un equipo de baloncesto durante 12 jornadas han sido: 3.º, 5.º, 2.º, 1.º, 3.º, 4.º, 2.º, 5.º, 3.º, 2.º, 4.º y 2.º.**

a) Realiza una tabla de frecuencias según los datos anteriores.

b) Haz un gráfico de líneas.

PUESTO	N.º DE VECES
1.º	1
2.º	
3.º	
4.º	
5.º	2

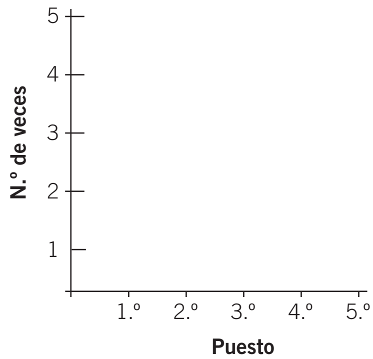


DIAGRAMA DE SECTORES

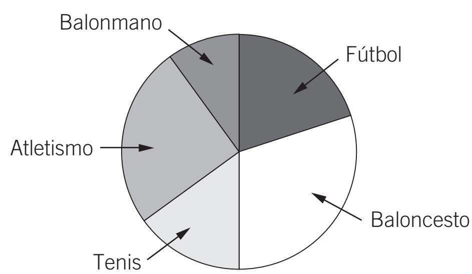
Los datos se representan en un círculo. Cada sector representa un valor de la variable. El ángulo de cada sector circular es proporcional a la frecuencia absoluta de cada dato.

EJEMPLO

Los deportes favoritos de 40 alumnos son:

DEPORTE	FRECUENCIA
Fútbol	8
Baloncesto	12
Tenis	6
Atletismo	10
Balonmano	4
Total	**40**

Deportes favoritos



9 **Para hallar el ángulo de cada sector utilizamos el siguiente procedimiento.**

Dividimos el círculo completo: 360º, en tantas partes como frecuencias absolutas hay: 40; multiplicamos el resultado por cada frecuencia absoluta y con el transportador se halla cada sector circular.

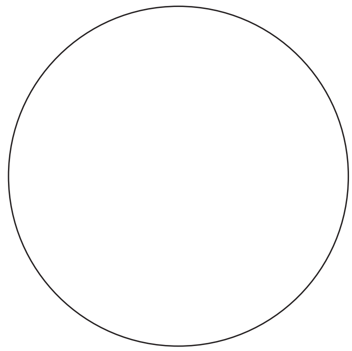
A cada parte le corresponden 360° : 40 = 9°.

Completa la tabla.

DEPORTE	FRECUENCIA	SECTOR CIRCULAR (°)
Fútbol	8	$9 \cdot 8 =$ **72°**
Baloncesto	12	$9 \cdot 12 =$ ……
Tenis	6	$9 \cdot$ …… = ……
Atletismo	10	$9 \cdot$ …… = ……
Balonmano	4	$9 \cdot 4 =$ **36°**
Total	**40**	……. = **360°**

10 **El destino vacacional de 90 familias ha sido el siguiente.**

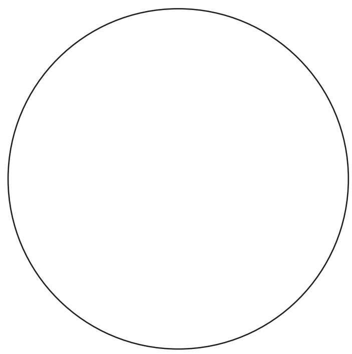
DESTINO	FRECUENCIA ABSOLUTA	SECTOR CIRCULAR 360° : 90 = ...
Playa	26	
Montaña	22	
Turismo rural	18	
Circuitos	10	
Extranjero	8	
Otros destinos	6	
Total	**90**	**360°**



Completa la tabla y representa los datos mediante un diagrama de sectores.

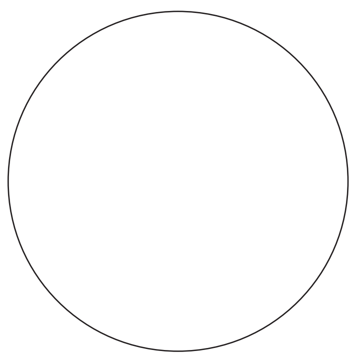
11 **Se ha realizado una encuesta a 360 hogares sobre los canales de televisión preferidos. Las respuestas han sido las reflejadas en la tabla. Represéntalas en un diagrama de sectores.**

DESTINO	FRECUENCIA ABSOLUTA	SECTOR CIRCULAR 360° : 360 = ...
TVE7	120	
La 3	20	
Autonómicas	45	
Antena 4	35	
Tele 2	80	
La Quinta	60	
Total	**360**	**360°**



12 **El número de hermanos de los 24 alumnos de 2.º ESO se indica en la tabla. Representa los datos en un diagrama de sectores.**

NÚMERO DE HERMANOS	FRECUENCIA ABSOLUTA	SECTOR CIRCULAR 360° : 24 = ...
1	5	
2	8	
3	6	
4	4	
5 o más	1	
Total	**24**	**360°**



NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MEDIA ARITMÉTICA

- La **media aritmética** de un conjunto de datos es el **valor medio** que los representa. Es un valor numérico que está comprendido entre el menor valor y el mayor de un conjunto de datos. Puede no coincidir con alguno de los datos, y también puede ser un número decimal.
- Solo se obtiene con datos cuantitativos (cantidades). Se suele representar con el símbolo $\overline{x}$.

Cálculo de la media aritmética

– Se obtiene dividiendo la suma de todos los datos entre el número total de ellos.

– Si los datos vienen en una tabla con sus frecuencias absolutas, se multiplica cada dato por su frecuencia, se suman todos los productos obtenidos y se divide entre el número total de ellos.

EJEMPLO

La altura (en cm) de 24 alumnos de ESO es: 160, 168, 164, 170, 162, 166, 172, 168, 164, 162, 160, 168, 170, 160, 162, 164, 160, 170, 160, 164, 168, 162, 160, 160. ¿Cuál es la altura media del grupo?

$$\overline{x} = \frac{1.120 + 648 + 656 + 166 + 672 + 510 + 172}{24} = \frac{3.944}{24} = 164{,}33 \text{ cm}$$

ALTURA	FRECUENCIA ABSOLUTA	DATOS POR FREC. ABSOLUTA
160	7	1.120
162	4	648
164	4	656
166	1	166
168	4	672
170	3	510
172	1	172
Total	**24**	**3.944**

164,33 cm es la media aritmética.

- La media representa la altura media del grupo.
- Está comprendida entre el valor menor y mayor: 160 cm y 172 cm.
- No ha coincidido con ningún valor y es un número decimal.

1 **Los pesos (en kg) de cinco jugadores de baloncesto son: 54, 58, 62, 60 y 56. Halla el peso medio.**

$$\overline{x} = \frac{54 + 58 + \dots\dots}{5} =$$

2 **Marta ha obtenido estas notas en cuatro exámenes de Historia: 6,5; 5,75; 7,25 y 7. Calcula su nota media.**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Las temperaturas (en °C) registradas durante el mes de septiembre han sido:**

18, 19, 22, 16, 21, 20, 19, 18, 17, 22, 21, 23, 25, 19, 20, 19,
22, 21, 20, 24, 23, 21, 19, 4, 23, 19, 18, 19, 20, 21

Halla la temperatura media del mes.

MEDIANA Y MODA

- La **mediana** de un conjunto de datos es el **valor central** de ellos.
- Si el número de datos es impar, se ordenan y la mediana será el valor central.
- Si el número de datos es par, se ordenan y la mediana será la semisuma de los dos valores centrales.
- La **moda** de un conjunto de datos es el **valor que más se repite**, es decir, el que tiene mayor frecuencia absoluta. Puede haber una, varias o ninguna moda.

EJEMPLO

Las notas de un grupo de 7 alumnos en Matemáticas son:

6, 7, 5, 8, 7, 4, 3

Calcula la mediana y la moda.

Mediana:

3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 7 - 8

6 es el valor central y es la mediana.

Moda:

7 es el valor con mayor frecuencia (2 veces) y es la moda.

DATOS	FREC. ABSOLUTA
3	1
4	1
5	1
6	1
7	2
8	1

4 **Respecto a los datos del ejemplo anterior, si añadimos la nota de un 9 referida a un alumno más, calcula ahora la mediana y la moda de las calificaciones.**

5 **Las edades (en años) de un grupo de amigas son: 16, 15, 17, 15, 17, 14, 15 y 16. Halla la mediana y la moda.**

6 **Calcula la mediana y la moda de los datos del ejercicio 3.**